TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN
Fakultät Informatik, Institut für Künstliche Intelligenz, Professur für Computational Logic

FORMALE SYSTEME

3. Vorlesung: Endliche Automaten

Hannes Straß

TU Dresden, 18. Oktober 2021

Übungen

Übungsbeginn: Montag, der 18. Oktober 2021

- Termine: Mo 2., Fr 3., Do 1., Do 5., Fr 4.

Übungsbeginn: Montag, der 1. November 2021

- Termine: Mi 6., Fr 6., Mo 2., Fr 2., Mo 6.

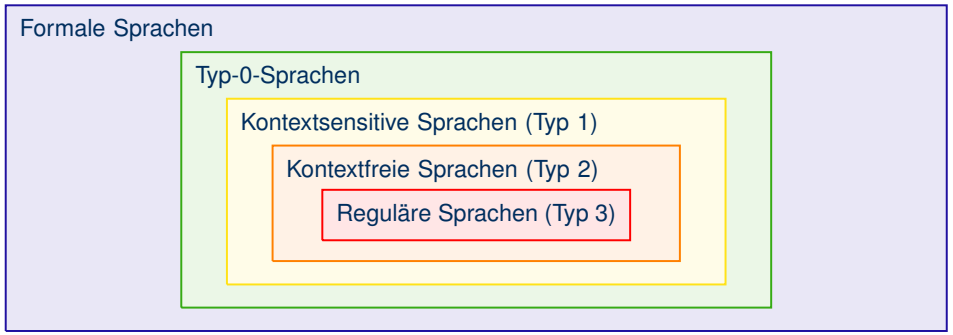
Vorübergehender Übungsbetrieb: 18.–29. Oktober 2021

Online-Übungen für alle, deren Übung erst am 1. November beginnt:

- Montags 4. DS (Thomas Feller)
- Mittwochs 6. DS (Dörthe Arndt)
- Donnerstags 5. DS (Hannes Straß)
- Freitags 2. DS (Jonas Karge)

Wiederholung

Mit Grammatiken können wir Sprachen beschreiben und sie grob in Typen unterteilen:



Grammatiken in der Praxis

Grammatiken in der Praxis

oben: John Backus, Peter Naur
unten: Niklaus Wirth, Pānini

Eine „ASCII-Syntax“ für Typ-2-Grammatiken ist die sogenannte Backus-Naur-Form (BNF):[1]

- statt → wird ::= verwendet
- | für Alternativen (wie bei uns)
- Markierung: "Terminalsymbole" und <Nichterminalsymbole>

Erweiterte BNF (EBNF, von Niklaus Wirth):

- allgemein wie BNF, aber Konkatenation mit Kommas
- Zusätzliche Abkürzungen `[X]` für „null oder ein X“ und `{X}` für „null oder mehr X“

In der Praxis sind unterschiedliche Notationen im Einsatz
(EBNF von Wirth; ISO EBNF; W3C EBNF; „Augmented BNF“ der IETF; verschiedene „EBNF“ aus Vorlesungen und Lehrbüchern . . .)

[1] Pānini, 5./4. Jhd. v.u.Z.; neu erfunden von John Backus im Jahr 1959.

Sprachen Nutzen und Verstehen

Von Beschreiben zu Erkennen

Grammatiken beschreiben Sprachen als Mengen von Wörtern, die sie erzeugen können.

Praktisch wichtige Aufgabe: Erkennen, ob ein Wort in einer Sprache liegt.

Das Wortproblem für eine Sprache **L** über Alphabet Σ besteht darin, die folgende Funktion zu berechnen:

Eingabe: ein Wort $w \in \Sigma^*$
Ausgabe: „ja“ wenn $w \in \mathbf{L}$ und „nein“ wenn $w \notin \mathbf{L}$

Für die Sprache $\{a\} \circ \{b\}^*$ wird das Wortproblem durch einen einfachen Algorithmus in linearer Zeit gelöst (teste, ob der erste Buchstabe a ist und ob alle folgenden Buchstaben b sind).

Andererseits kann das Wortproblem sehr schwer sein, selbst für Sprachen, die mit einer Grammatik formal beschrieben sind.

Ausblick

Wir werden sehen, dass jede Sprachklasse zu einem bestimmten Berechnungsmodell passt:

Sprachklasse	Berechnungsmodell	Wortproblem
Typ 0	Turingmaschine (TM)	semi-entscheidbar[1]
Kontextsensitiv	nichtdeterministische TM mit linearem Speicher	PSpace-vollständig[2]
Kontextfrei	nichtdeterministischer Kellerautomat	polynomiell
Regulär	endlicher Automat	polynomiell[3]

[1] Akzeptanz von Wörtern kann beliebig lange dauern, so dass man nie weiß, ob sie noch passiert; Wörter können nur rekursiv aufgezählt werden.
[2] Höchstwahrscheinlich schwerer als NP; jeder praktisch bekannte Algorithmus benötigt im schlimmsten Fall exponentiell viel Zeit.
[3] Tatsächlich sogar noch viel einfacher als Typ 2.

Weitere Fragestellungen

Das Wortproblem ist nicht die einzige praktisch relevante Frage.

Darstellungen von Sprachen

- Welche verschiedenen Darstellungen gibt es (Grammatiken, Automaten, ...)? Wie kann man eine Darstellung in eine andere übersetzen?
- Beschreiben zwei Darstellungen die gleiche Sprache? Beschreibt eine Darstellung die leere Sprache?
- Wie kann eine Darstellung vereinfacht werden?

Eigenschaften von Sprachen

- Was passiert, wenn man Operationen anwendet, um neue Sprachen zu erzeugen?

  Beispiel:
  Wenn $\mathbf{L_1}$ und $\mathbf{L_2}$ regulär sind, wie ist es dann mit $\mathbf{L_1} \cap \mathbf{L_2}$?

  $\rightsquigarrow$ sogenannte Abschlusseigenschaften

Vorschau

Plan der nächsten Vorlesungen:

Reguläre Sprachen

- endliche Automaten
- reguläre Ausdrücke
- Eigenschaften regulärer Sprachen

Kontextfreie Sprachen

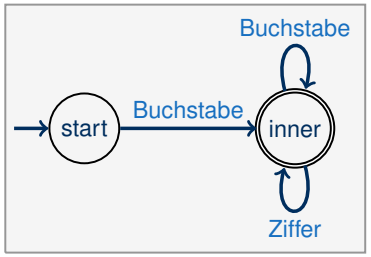
- Normalformen kontextfreier Grammatiken
- Kellerautomaten
- Eigenschaften kontextfreier Sprachen

Endliche Automaten

Beispiel

„Ein Bezeichner ist ein String, der mit einem Buchstaben beginnt und danach nur Buchstaben oder Ziffern enthält.“

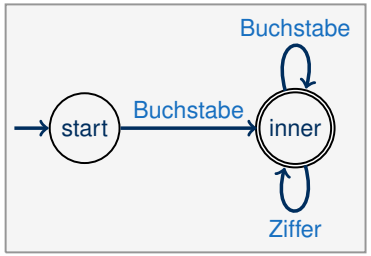
Darstellung als endlicher Automat:



- Automat beginnt im Startzustand → start
- Zustandswechsel gemäß Pfeilen
- Kein passender Pfeil für Symbol?
  „`return false`“
- Keine weiteren Symbole?
  „`return true`“ in Endzustand inner
  „`return false`“ falls in Zustand start

Worterkennung mit Automaten

Ein Automat kann eine Sprache erkennen, indem er Wörter akzeptiert oder ablehnt:



Wort	Zustandsfolge	Ergebnis
utf8	start inner inner inner inner	akzeptiert
C++	start inner ?	abgelehnt (fehlender Übergang)
ϵ	start	abgelehnt (kein Endzustand)

Deterministische Endliche Automaten

Die graphische Darstellung von Automaten ist anschaulich, aber nicht immer praktisch.
Formal definieren wir Automaten wie folgt:

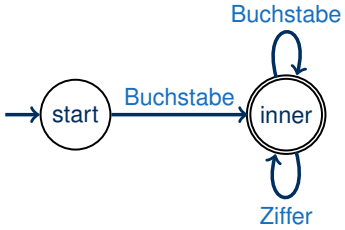
Ein deterministischer endlicher Automat (international: „DFA“, deterministic finite automaton) $\mathcal{M}$ ist ein Tupel $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ mit den folgenden Bestandteilen:

- Q: endliche Menge von Zuständen
- Σ: Alphabet
- δ: Übergangsfunktion, eine partielle* Funktion $Q \times \Sigma \to Q$
- q_0: Startzustand $q_0 \in Q$
- F: Menge von Endzuständen $F \subseteq Q$

(* D.h. manche Übergänge sind undefiniert, wie im Beispiel.)

Notation: Wir schreiben statt $\delta(q, \mathtt{a}) = q'$ auch $q \xrightarrow{\mathtt{a}} q'$.

Beispiel



Endlicher Automat $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ mit

- $Q = \{\text{start}, \text{inner}\}$
- $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \ldots, \mathtt{0}, \mathtt{1}, \ldots, \mathtt{9}, \ldots\}$ (in Zeichnung unterspezifiziert)
- δ definiert wie folgt:
  $\delta(\text{start}, x) = \text{inner}$ für alle Buchstaben x
  $\delta(\text{inner}, y) = \text{inner}$ für alle Buchstaben und Ziffern y
  $\delta(q, x)$ undefiniert für alle anderen Fälle
- $q_0 = \text{start}$
- $F = \{\text{inner}\}$

Ist mein Computer ein DFA?

Beobachtungen:

- Computer haben endlich viel Speicher, können also nur endlich viele Zustände einnehmen
- Programme verändern Speicher nach festen Regeln, die man als Übergangsfunktion auffassen könnte

Sind alle Computer DFAs?

Jein.

- Zustandsmenge und Übergangsfunktion extrem groß
  $\rightsquigarrow$ keine praktisch nützliche Beschreibung für ganze Computer
- Computerprogramme verhalten sich systematisch, unabhängig von der Speichergröße
  $\rightsquigarrow$ DFA-Übergänge können diese Systematik nicht gut abbilden

Die Sprache eines DFA

Für einen DFA $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ erweitern wir $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ zu einer Übergangsfunktion $\delta^* : Q \times \Sigma^* \to Q$ auf Wörtern:

Für einen Zustand $q \in Q$ und ein Wort $w \in \Sigma^*$ sei $\delta^*(q, w)$ der eindeutig bestimmte Zustand, den man erreicht, wenn man ausgehend von q das Wort w einliest:

- $\delta^*(q, \epsilon) = q$ (Fall $w = \epsilon$)
- $\delta^*(q, \mathrm{a}v) = \delta^*(\delta(q, \mathrm{a}), v)$ (Fall $w = \mathrm{a}v$)

Der Wert $\delta^*(q, w)$ ist undefiniert, wenn einer der nötigen Übergänge undefiniert ist.

Die Sprache eines DFA kann nun formal definiert werden:

Die Sprache eines DFA $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ ist die Menge

$$\mathbf{L}(\mathcal{M}) = \{w \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_0, w) \in F\}.$$

Hinweis: Wir schreiben zukünftig auch δ für δ^*.

Quiz: Sprache eines DFA

Die Sprache eines DFA $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ ist $\mathbf{L}(\mathcal{M}) = \{w \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_0, w) \in F\}$.
Dabei ist die erweiterte Übergangsfunktion definiert durch:

- $\delta^*(q, \epsilon) = q$ (Fall $w = \epsilon$)
- $\delta^*(q, \mathrm{a}v) = \delta^*(\delta(q, \mathrm{a}), v)$ (Fall $w = \mathrm{a}v$)

Quiz: Wir betrachten den DFA $\mathcal{M} = \langle Q, \{0, 1\}, \delta, q_0, F \rangle$ mit den Übergängen:

...

Alternative Definition: Totale Übergänge

Wir können DFAs mit partieller Übergangsfunktion in DFAs mit totaler Übergangsfunktion umwandeln:

Eingabe: DFA $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$
Ausgabe: DFA $\mathcal{M}_{\text{total}} = \langle Q', \Sigma, \delta', q_0, F \rangle$

- füge einen neuen Fangzustand q_f ein: $Q' := Q \cup \{q_f\}$
- für alle Zustände $q \in Q'$ und Symbole $\mathrm{a} \in \Sigma$:

$$\delta'(q, \mathrm{a}) := \begin{cases} \delta(q, \mathrm{a}) & \text{falls } \delta(q, \mathrm{a}) \text{ definiert} \\ q_f & \text{falls } \delta(q, \mathrm{a}) \text{ nicht definiert} \end{cases}$$

Anmerkung: Laut dieser Definition gilt insbesondere $\delta'(q_f, \mathrm{a}) = q_f$ für alle $\mathrm{a} \in \Sigma$.
$\rightsquigarrow$ Wird beim Lesen eines Wortes q_f erreicht, dann kann es nicht mehr akzeptiert werden (da $q_f \notin F$).

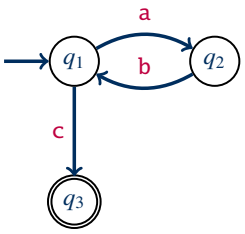
Der Fangzustand q_f wird teilweise auch als „Papierkorbzustand“ bezeichnet.

Totale Übergänge (2)

Satz: $\mathcal{M}_{\text{total}} = \langle Q', \Sigma, \delta', q_0, F \rangle$ hat eine totale Übergangsfunktion und akzeptiert die selbe Sprache wie $\mathcal{M}$, d.h. $\mathbf{L}(\mathcal{M}_{\text{total}}) = \mathbf{L}(\mathcal{M})$.

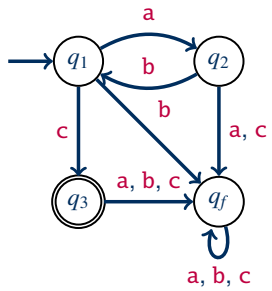
Beispiel: wir betrachten das Alphabet $\Sigma = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}\}$

DFA $\mathcal{M}$ mit partieller Übergangsfunktion:



$\mathbf{L}(\mathcal{M}) = (\mathrm{ab})^*\mathrm{c}$

DFA $\mathcal{M}_{\text{total}}$ mit totaler Übergangsfunktion:



Die Sprachen endlicher Automaten

Idee: Ein Typ von Automaten definiert eine Klasse von Sprachen
Bsp.: „die Klasse aller Sprachen, die irgendein DFA erkennen kann“

Eine Alternative zur Chomsky-Hierarchie?

Es zeigt sich: Mit DFAs erhält man keine neue Sprachklasse!

Satz: Die Klasse der Sprachen, die durch einen DFA erkannt werden können, ist genau die Klasse der regulären Sprachen.

Konsequenzen:

- DFAs können nur sehr einfache Sprachen akzeptieren.
- Typ-3-Sprachen sind eine „natürliche“ Klasse: Sowohl in der „Welt“ der Grammatiken als auch in der „Welt“ der Automaten leicht zu definieren.

Von DFAs zu regulären Grammatiken

Satz: Die Klasse der Sprachen, die durch einen DFA erkannt werden können, ist genau die Klasse der regulären Sprachen.

Beweis: Eine Richtung dieser Behauptung ist leicht zu sehen:

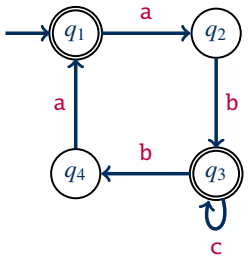
Für jeden DFA $\mathcal{M}$ gibt es eine reguläre Grammatik $G_\mathcal{M}$, welche die selbe Sprache erzeugt (d.h., $\mathbf{L}(\mathcal{M}) = \mathbf{L}(G_\mathcal{M})$).

Für $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$ ergibt sich $G_\mathcal{M} = \langle V, \Sigma, P, S\rangle$ wie folgt:

- $V := Q$
- $S := q_0$
- P besteht aus den folgenden Produktionsregeln:

$$\begin{aligned} q &\to \mathrm{a}q' && \text{falls } \delta(q, \mathrm{a}) = q' \\ q &\to \mathrm{a} && \text{falls } \delta(q, \mathrm{a}) \in F \\ q_0 &\to \epsilon && \text{falls } q_0 \in F \end{aligned}$$

Beispiel



Für $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$ ergibt sich $G_\mathcal{M} = \langle V, \Sigma, P, S\rangle$ wie folgt:

- $V := Q$
- $S := q_0$
- P besteht aus den folgenden Produktionsregeln:

$$\begin{aligned} q &\to \mathrm{a}q' && \text{falls } \delta(q, \mathrm{a}) = q' \\ q &\to \mathrm{a} && \text{falls } \delta(q, \mathrm{a}) \in F \\ q_0 &\to \epsilon && \text{falls } q_0 \in F \end{aligned}$$

Produktionsregeln der entsprechenden Grammatik:

$q_1 \to \mathrm{a}q_2$ $q_2 \to \mathrm{b}q_3$ $q_3 \to \mathrm{c}q_3$ $q_3 \to \mathrm{b}q_4$ $q_4 \to \mathrm{a}q_1$

$q_2 \to \mathrm{b}$ $q_3 \to \mathrm{c}$ $q_4 \to \mathrm{a}$

$q_1 \to \epsilon$

DFAs akzeptieren reguläre Sprachen: Beweis

Satz: Die Klasse der Sprachen, die durch einen DFA erkannt werden können, ist genau die Klasse der regulären Sprachen.

Beweis (Fortsetzung): Wir müssen noch die Korrektheit des angegebenen Verfahrens zeigen, also dass $\mathbf{L}(\mathcal{M}) = \mathbf{L}(G_\mathcal{M})$.

Dazu beweisen wir beide Richtungen einzeln:

„$\subseteq$“: Jedes von $\mathcal{M}$ akzeptierte Wort kann von $G_\mathcal{M}$ erzeugt werden.

„$\supseteq$“: Jedes von $G_\mathcal{M}$ erzeugte Wort kann von $\mathcal{M}$ akzeptiert werden.

$\mathbf{L}(\mathcal{M}) \subseteq \mathbf{L}(G_\mathcal{M})$

Wir betrachten ein beliebiges Wort $w \in \mathbf{L}(\mathcal{M})$.

Falls $w = \epsilon$, dann ist $q_0 \in F$.

- Dann hat $G_\mathcal{M}$ eine Regel $q_0 \to \epsilon$.
- Also ist $w \in \mathbf{L}(G_\mathcal{M})$.

Falls $w = a_1 \cdots a_n$ mit $n \geq 1$, dann gilt $\delta(q_0, w) \in F$.

- Dann gibt es Übergänge $q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} \ldots \xrightarrow{a_n} q_n$ mit $q_n \in F$
- Dann hat $G_\mathcal{M}$ die Regeln:

$$q_0 \to a_1 q_1 \qquad q_1 \to a_2 q_2 \qquad \ldots \qquad q_{n-1} \to a_n$$

- Durch Anwendung dieser Regeln kann man ableiten:

$$q_0 \Rightarrow a_1 q_1 \Rightarrow a_1 a_2 q_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow a_1 a_2 \cdots a_{n-1} q_{n-1} \Rightarrow a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n$$

- Also ist $w \in \mathbf{L}(G_\mathcal{M})$.

Somit gilt $w \in \mathbf{L}(G_\mathcal{M})$ für beliebige $w \in \mathbf{L}(\mathcal{M})$, d.h. $\mathbf{L}(\mathcal{M}) \subseteq \mathbf{L}(G_\mathcal{M})$.

$\mathbf{L}(\mathcal{M}) \supseteq \mathbf{L}(G_\mathcal{M})$

$G_\mathcal{M}$ hat drei Typen von Regeln: $q \to aq'$, $q \to a$ und $q_0 \to \epsilon$.

Für ein Wort $w = a_1 \cdots a_n$ sind zwei Arten von Ableitungen denkbar:

(1) $q_0 \Rightarrow a_1 q_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow a_1 \cdots a_{n-1} q_{n-1} \Rightarrow a_1 \cdots a_{n-1} a_n$

(2) $q_0 \Rightarrow a_1 q_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow a_1 \cdots a_{n-1} q_{n-1} \Rightarrow a_1 \cdots a_{n-1} a_n q_n \Rightarrow a_1 \cdots a_n$

In Fall (1) wurden Regeln der folgenden Form angewendet:

$$q_0 \to a_1 q_1 \qquad q_1 \to a_2 q_2 \qquad \ldots \qquad q_{n-1} \to a_n$$

Also hat $\mathcal{M}$ die folgenden Übergänge:

$$q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \qquad q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \qquad \ldots \qquad q_{n-1} \xrightarrow{a_n} q_n$$

wobei $q_n \in F$ ein Endzustand ist.

Also gilt $\delta(q_0, a_1 \cdots a_n) = q_n \in F$ und $\mathcal{M}$ akzeptiert das Wort w.

$\mathbf{L}(\mathcal{M}) \supseteq \mathbf{L}(G_\mathcal{M})$

$G_\mathcal{M}$ hat drei Typen von Regeln: $q \to aq'$, $q \to a$ und $q_0 \to \epsilon$

Für ein Wort $w = a_1 \cdots a_n$ sind zwei Arten von Ableitungen denkbar:

(1) $q_0 \Rightarrow a_1 q_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow a_1 \cdots a_{n-1} q_{n-1} \Rightarrow a_1 \cdots a_{n-1} a_n$

(2) $q_0 \Rightarrow a_1 q_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow a_1 \cdots a_{n-1} q_{n-1} \Rightarrow a_1 \cdots a_{n-1} a_n q_n \Rightarrow a_1 \cdots a_n$

In Fall (2) wurden Regeln der folgenden Form angewendet:

$$q_0 \to a_1 q_1 \qquad q_1 \to a_2 q_2 \qquad \ldots \qquad q_{n-1} \to a_n q_n \qquad q_n \to \epsilon$$

Also ist $q_n = q_0$ mit $q_0 \in F$ und $\mathcal{M}$ hat die folgenden Übergänge:

$$q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \qquad q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \qquad \ldots \qquad q_{n-1} \xrightarrow{a_n} q_0$$

Also gilt $\delta(q_0, a_1 \cdots a_n) = q_0 \in F$ und $\mathcal{M}$ akzeptiert das Wort w.

Zusammengefasst gilt somit $w \in \mathbf{L}(\mathcal{M})$ für beliebige $w \in \mathbf{L}(G_\mathcal{M})$, d.h. $\mathbf{L}(\mathcal{M}) \supseteq \mathbf{L}(G_\mathcal{M})$. □

Reguläre Grammatiken und DFAs

Wir haben bisher gezeigt:

> Jede von DFA erkannte Sprache ist regulär.

Für die Umkehrung müsste man reguläre Grammatiken in DFAs übersetzen.

Kann man die Übersetzung nicht einfach umdrehen?

- Für jede reguläre Regel $A \to aB$ definieren wir $\delta(A, a) = B$
- Für jede reguläre Regel $A \to a$ definieren wir $\delta(A, a) = C$ mit $C \in F$

Warum funktioniert das nicht?

Weil die Übergangsfunktion dann nicht immer eindeutig definiert wäre!

> Beispiel: Eine Grammatik kann die Regeln $S \to aA$, $S \to aS$ und $A \to \epsilon$ haben, aber wir können nicht $\delta(S, a) = A$ und $\delta(S, a) = S$ gleichzeitig fordern.

Nichtdeterministische Übergänge

Kann die Übergangsfunktion „mehr als einen Rückgabewert“ haben?

$\rightsquigarrow$ Technisch wäre das darstellbar mittels Mengen, z.B. $\delta(q, \mathtt{a}) = \{q_1, q_2\}$.

Was soll das bedeuten?

- Der Automat hat die Wahl zwischen mehreren Übergängen.
- Die Verarbeitung eines Wortes wird nichtdeterministisch, weil die Eingabe nicht völlig bestimmt, in welchen Zustand der Automat gelangt.
- Der Automat akzeptiert ein Wort, wenn es eine „richtige“ Wahl von Zustandsübergängen gibt (d.h. eine, die zu einem Endzustand führt).

Nichtdeterministische Automaten

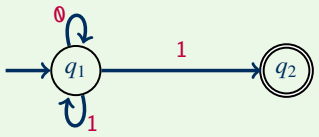
Ein nichtdeterministischer endlicher Automat (international: „NFA“) $\mathcal{M}$ ist ein Tupel $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F\rangle$ mit folgenden Bestandteilen:

- Q: endliche Menge von Zuständen,
- Σ: Alphabet,
- δ: Übergangsfunktion, eine totale Funktion $Q \times \Sigma \to 2^Q$, wobei 2^Q die Potenzmenge von Q ist;
- Q_0: Menge möglicher Startzustände $Q_0 \subseteq Q$,
- F: Menge von Endzuständen $F \subseteq Q$.

Notation: Wir schreiben statt $q' \in \delta(q, \mathtt{a})$ auch $q \xrightarrow{\mathtt{a}} q'$.

Beispiel: NFA

Beispiel:



$\delta(q_1, \mathtt{0}) = \{q_1\}$
$\delta(q_1, 1) = \{q_1, q_2\}$
$\delta(q_2, \mathtt{0}) = \emptyset$
$\delta(q_2, 1) = \emptyset$

Wort	Zustandsfolge	Ergebnis
011	$q_1\ q_1\ q_2$?	abgelehnt (fehlender Übergang)
011	$q_1\ q_1\ q_1\ q_2$	akzeptiert

$\rightsquigarrow$ 011 wird nichtdeterministisch akzeptiert

Quiz: Akzeptanz eines NFA

Quiz: Wir betrachten den grafisch gegebenen NFA $\mathcal{M} = \langle Q, \{\mathtt{0}, 1\}, \delta, Q_0, F\rangle$:

...

NFAs: Alternative Definitionen

In der Literatur gibt es leicht abgewandelte Definitionen von NFAs:

- Übergangsrelation statt Übergangsfunktion
  Statt einer Funktion $\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$ kann man auch eine Relation $\Delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$ verwenden, wenn für alle $q, q' \in Q$, $\sigma \in \Sigma$ gilt:

$$q' \in \delta(q, \sigma) \qquad \text{genau dann, wenn} \qquad \langle q, \sigma, q' \rangle \in \Delta$$

- Einzelner Startzustand q_0
  Manchmal wird statt der Menge Q_0 nur ein Startzustand q_0 verwendet. (Es ist aber leicht, einen NFA unserer Bauart so zu verändern, dass nur ein Startzustand nötig ist.)
- Einzelner Endzustand q_f
  Man kann auch die Menge der Endzustände F leicht auf ein einziges Argument reduzieren.

Ist Nichtdeterminismus sinnvoll?

Nichtdeterministische Automaten müssen jeweils den richtigen Übergang „erraten“.
$\rightsquigarrow$ Das entspricht nicht der Funktionsweise echter Computer . . .

Dennoch ist Nichtdeterminismus ein wichtiges Prinzip in der Informatik:

- Kann kompaktere, natürlichere Darstellungen ermöglichen.
- Beschreibt treffend die Schwierigkeit vieler praktischer Probleme – wichtig für Untersuchung von Komplexität und Berechenbarkeit.
- Ist relevant in der Modellierung parallel arbeitender Systeme.
- Bildet Ausgangspunkt für die Entwicklung deterministischer Algorithmen.

Zusammenfassung und Ausblick

Das Wortproblem ist eine von mehreren wichtigen Fragestellungen zu formalen Sprachen.

Deterministische endliche Automaten (DFAs) können mit partieller oder totaler Übergangsfunktion definiert werden.

DFAs lösen das Wortproblem für reguläre Sprachen.
(Bisher gezeigt: Jede durch DFAs erkennbare Sprache ist regulär.)

Nichtdeterminismus ermöglicht endlichen Automaten, bei der Worterkennung zu „raten“.

Nächste Themen:

- Was bringen uns nichtdeterministische Automaten?
- Noch zu zeigen: Alle regulären Sprachen sind durch DFAs erkennbar.
- Nichtdeterministische Automaten
- Gibt es noch mehr Darstellungsformen für reguläre Sprachen?

Bildrechte

Folie 4:

- Portrait John Backus: Wikipedia-Nutzer **Plerre.Lescanne**, CC-By-SA 4.0
- Portrait Peter Naur: Wikipedia-Nutzer **Eriktj**, CC-By-SA 3.0
- Portrait Niklaus Wirth: Wikipedia-Nutzer **Tyomitch**, used with permission of copyright holder
- Foto Büste Pānini: Wikipedia-Nutzer **Jameela P.**, CC-By-SA 4.0