Formale Systeme

13. Übungsblatt

Wintersemester 2020/21

Aufgabe zur Selbstkontrolle (diese wird nur auf konkrete Nachfrage in den Übungen besprochen)

S21) Prüfen Sie mittels Resolution die folgenden Formeln jeweils auf Erfüllbarkeit:

$$a \wedge \Big((c \wedge b) \wedge \big((\neg c \vee \neg b) \vee (a \wedge (c \wedge b))\big)\Big)$$

$$(\neg a \vee \neg b) \wedge (a \vee b) \wedge (\neg a \vee c) \wedge (a \vee \neg c) \wedge (b \vee \neg d) \wedge (\neg b \vee d) \wedge (\neg c \vee d) \wedge (c \vee \neg d)$$

Aufgabe 1

Eine k-*Färbung* für einen endlichen Graphen G ist eine Zuordnung der Knoten von G zu Werten („Farben") in $\{1, \ldots, k\}$, so dass Knoten, die in G durch eine Kante verbunden sind, nicht denselben Wert zugeordnet bekommen.

Geben Sie für einen endlichen Graphen $G = (V, E)$ mit n Knoten und einen Wert k eine aussagenlogische Formel $\varphi_{G,k}$ an, so dass $\varphi_{G,k}$ genau dann erfüllbar ist, wenn es eine k-Färbung von G gibt.

Aufgabe 2

a) Es sei φ eine Formel, die ausschließlich den Junktor $\rightarrow$ verwendet. Zeigen Sie: Wenn $w(p_i) = 1$ für alle $p_i \in \mathrm{Var}(\varphi)$ ist, dann ist auch $w(\varphi) = 1$.

b) Es sei φ eine allgemeine aussagenlogische Formel. Beweisen oder widerlegen Sie: φ ist äquivalent zu einer Formel, die ausschließlich den Junktor $\rightarrow$ verwendet.

Aufgabe 3

Sei Σ ein Alphabet und L, L_1, $L_2 \subseteq \Sigma^*$ entscheidbare Sprachen.

Zeigen Sie:

(a) $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2$, $L_1 \setminus L_2$ und $L_1 \circ L_2$ sind entscheidbar.

(b) $L^R = \{w^R : w \in L\}$ ist entscheidbar, wobei für $w = a_1 \ldots a_{n-1} a_n \in \Sigma^*$:

$$w^R = a_n a_{n-1} \ldots a_1$$

(und $\varepsilon^R = \varepsilon$, $a^R = a$ für $a \in \Sigma$).

(c) Jede co-endliche Sprache ist entscheidbar. Dabei wird L co-endlich genannt, wenn $\overline{L}$ endlich ist.