TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Informatik, Institut für Künstliche Intelligenz, Professur Computational Logic

Dr. habil. Hannes Straß Dr. Dörthe Arndt

Übungen zur Lehrveranstaltung

Formale Systeme

Wintersemester 2021/22

14. Übungsblatt

Woche vom 31. Januar bis 4. Februar 2022

Aufgabe 1

Stimmen die folgenden Aussagen? Begründen Sie.

a) Wenn $\Gamma \models \psi$ und ψ eine Tautologie ist, dann ist Γ auch allgemeingültig.

b) Eine Formel φ ist eine Hornformel, wenn sie in NNF ist und aus Konjunktionen innerhalb von Disjunktionen von Literalen besteht, von denen jede höchstens ein positives Literal enthält.

c) Für $K_1 = \{a, b, c\}$ und $K_2 = \{\neg a, \neg b\}$ ist $\{c\}$ keine Resolvente.

d) Aus $\models \varphi$ folgt, dass φ allgemeingültig ist.

Aufgabe 2

Welche der folgenden Formeln sind erfüllbar? Welche der Formeln gehören zu dem Formeltyp, für den Erfüllbarkeit in polynomieller Zeit lösbar ist?

$$\Bigg(\Bigg(\big(((p_1 \land p_2) \lor p_3) \land p_4\Big) \land (\neg p_1 \lor \neg p_3)\big) \lor (\neg p_2 \land \neg p_4\Bigg)\Bigg) \tag{1}$$

$$(\neg(\neg p_1 \land \neg(p_2 \land (\neg p_1 \to p_2))) \land \neg p_2) \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}
\big((\neg p_1 \lor \neg p_2 \lor \neg p_3 \lor p_4) \land \\
(\neg p_5 \lor \neg p_6) \land \\
(\neg p_7 \lor \neg p_2 \lor p_6) \land \\
(\neg p_6 \lor \neg p_2) \land \\
(\neg p_6 \lor \neg p_3 \lor p_2) \land \\
(\neg p_3 \lor \neg p_4 \lor p_5) \land \\
(\neg p_1 \lor p_7) \land \\
(\neg p_1 \lor \neg p_7 \lor p_4) \land \\
p_3 \land p_1\big)
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\big((p_1 \lor \neg p_2) \land (p_2 \lor \neg p_3) \land (p_3 \lor \neg p_1) \land (\neg p_2 \lor \neg p_3) \land p_1\big) \tag{4}$$

Aufgabe 3

Begründen Sie die Semientscheidbarkeit des folgenden Problems:

- Gegeben ist eine Zahlenfolge $s = s_1 s_2 \dots s_n \in \{0, 1, \dots, 9\}^n$, $n \geq 1$.
- Gefragt: Kommt in dem Nachkommateil der Dezimaldarstellung von π die Sequenz s vor?

Hinweis: Sie dürfen als bekannt voraussetzen, daß es beliebig genaue Näherungsverfahren für π gibt. Skizzieren Sie die Arbeitsweise eines Semientscheidungsverfahrens für das genannte Problem unter Verwendung eines Algorithmus

$$\textit{Pi-Näherungsverfahren}(k),$$

das als Eingabe eine natürliche Zahl $k \geq 1$ hat und als Ausgabe die k ersten Ziffern des Nachkommateils der Dezimaldarstellung von π zurückgibt.

Aufgabe 4

Gegeben sei eine endliche Menge E von Elementen und eine Menge V von Variablen. Ein *Mengen-Constraintsystem* C über E und V ist eine endliche Menge von Constraints der Form:

$$a \in X, a \notin X, a \in X \cup Y, \text{ oder } X \subseteq Y \cup Z$$

für $a \in E$ und $X, Y, Z \in V$. Eine *Lösung* L eines Mengen-Constraintsystems C über E und V ist eine Abbildung $L : V \to 2^E$, so dass

$$\begin{aligned}
&\text{für alle Ausdrücke der Form } (a \in X) \in C \text{ gilt: } a \in L(X),\\
&\text{für alle Ausdrücke der Form } (a \notin X) \in C \text{ gilt: } a \notin L(X),\\
&\text{für alle Ausdrücke der Form } (a \in X \cup Y) \in C \text{ gilt: } a \in L(X) \cup L(Y),\\
&\text{für alle Ausdrücke der Form } (X \subseteq Y \cup Z) \in C \text{ gilt: } L(X) \subseteq L(Y) \cup L(Z).
\end{aligned}$$

a) Hat das folgende Mengen-Constraintsystem eine Lösung?

$$\begin{aligned}
V &= \{M_1, M_2, M_3, M_4\}\\
E &= \{a, b, c, d\}\\
C &= \{M_2 \subseteq M_1 \cup M_3, M_4 \subseteq M_3 \cup M_2,\\
&\qquad a \in M_1, a \notin M_3, b \in M_4, b \in M_1, b \notin M_3,\\
&\qquad c \in M_4, c \notin M_1, c \notin M_3, d \in M_4, d \notin M_1, d \notin M_2\}
\end{aligned}$$

b) Geben Sie ein allgemeines Verfahren an, das Lösungen eines Mengen-Constraintsystems in polynomieller Zeit entscheidet.

   Hinweis: Übersetzen Sie C in eine endliche Menge von Hornformeln – entscheidend ist die Kodierung der Mengenzugehörigkeit von Elementen.