Theoretische Informatik und Logik: Repetitorium 1

Maximilian Marx

Wissensbasierte Systeme, TU Dresden

2018-06-15

Blatt 1

Aufgabe B

Zeigen Sie: Wenn es möglich ist, für zwei beliebige Turing-Maschinen zu entscheiden, ob sie dieselbe Sprache akzeptieren, so ist es auch möglich, für beliebige Turing-Maschinen zu entscheiden, ob sie die leere Sprache akzeptieren.

Blatt 1

Aufgabe B

Zeigen Sie: Wenn es möglich ist, für zwei beliebige Turing-Maschinen zu entscheiden, ob sie dieselbe Sprache akzeptieren, so ist es auch möglich, für beliebige Turing-Maschinen zu entscheiden, ob sie die leere Sprache akzeptieren.

Lösungsvorschlag

- Sei $\mathcal{K}$ eine TM, so dass für alle TMs $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ gilt: $\mathcal{K}$ akzeptiert die Eingabe $\mathsf{enc}(\mathcal{M}_1)\#\#\,\mathsf{enc}(\mathcal{M}_2)$ genau dann, wenn $\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) = \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$, und verwirft sonst.

Blatt 1

Aufgabe B

Zeigen Sie: Wenn es möglich ist, für zwei beliebige Turing-Maschinen zu entscheiden, ob sie dieselbe Sprache akzeptieren, so ist es auch möglich, für beliebige Turing-Maschinen zu entscheiden, ob sie die leere Sprache akzeptieren.

Lösungsvorschlag

- Sei $\mathcal{K}$ eine TM, so dass für alle TMs $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ gilt: $\mathcal{K}$ akzeptiert die Eingabe $\mathsf{enc}(\mathcal{M}_1)\#\#\,\mathsf{enc}(\mathcal{M}_2)$ genau dann, wenn $\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) = \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$, und verwirft sonst.
- Sei $\mathcal{M}_\varnothing$ eine TM, die immer verwirft.

Blatt 1

Aufgabe B

Zeigen Sie: Wenn es möglich ist, für zwei beliebige Turing-Maschinen zu entscheiden, ob sie dieselbe Sprache akzeptieren, so ist es auch möglich, für beliebige Turing-Maschinen zu entscheiden, ob sie die leere Sprache akzeptieren.

Lösungsvorschlag

- Sei $\mathcal{K}$ eine TM, so dass für alle TMs $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ gilt: $\mathcal{K}$ akzeptiert die Eingabe $\mathsf{enc}(\mathcal{M}_1)\#\#\,\mathsf{enc}(\mathcal{M}_2)$ genau dann, wenn $\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) = \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$, und verwirft sonst.
- Sei $\mathcal{M}_\varnothing$ eine TM, die immer verwirft.
- Dann ist $\mathcal{K}'$ mit $\mathcal{K}'(\mathsf{enc}(\mathcal{M})) = \mathcal{K}(\mathsf{enc}(\mathcal{M})\#\#\,\mathsf{enc}(\mathcal{M}_\varnothing))$ ein Entscheider für die Leerheit von $\mathbf{L}(\mathcal{M})$.

Blatt 2

Aufgabe C

Zeigen Sie, dass $\{1\}^*$ unentscheidbare Teilmengen besitzt.

Blatt 2

Aufgabe C

Zeigen Sie, dass $\{1\}^*$ unentscheidbare Teilmengen besitzt.

Lösungsvorschlag

- $\mathcal{P}(\{1\}^*) = \left\{S \mid S \subseteq \{1\}^*\right\}$ hat überabzählbar viele Elemente, d.h.

Blatt 2

Aufgabe C

Zeigen Sie, dass $\{1\}^*$ unentscheidbare Teilmengen besitzt.

Lösungsvorschlag

- $\mathcal{P}(\{1\}^*) = \big\{S \mid S \subseteq \{1\}^*\big\}$ hat überabzählbar viele Elemente, d.h.
- $\{1\}^*$ hat überabzählbar viele Teilmengen.

Blatt 2

Aufgabe C

Zeigen Sie, dass $\{1\}^*$ unentscheidbare Teilmengen besitzt.

Lösungsvorschlag

- $\mathcal{P}(\{1\}^*) = \{S \mid S \subseteq \{1\}^*\}$ hat überabzählbar viele Elemente, d.h.
- $\{1\}^*$ hat überabzählbar viele Teilmengen.
- Es gibt aber nur abzählbar unendlich viele entscheidbare Mengen.

Blatt 2

Aufgabe C

Zeigen Sie, dass $\{1\}^*$ unentscheidbare Teilmengen besitzt.

Lösungsvorschlag

- $\mathcal{P}(\{1\}^*) = \big\{S \mid S \subseteq \{1\}^*\big\}$ hat überabzählbar viele Elemente, d.h.
- $\{1\}^*$ hat überabzählbar viele Teilmengen.
- Es gibt aber nur abzählbar unendlich viele entscheidbare Mengen.
- Also hat $\{1\}^*$ (überabzählbar viele) unentscheidbare Teilmengen.

Blatt 2

Aufgabe D

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

- Jedes LOOP-Programm terminiert.

Blatt 2

Aufgabe D

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

- Jedes LOOP-Programm terminiert.

Lösungsvorschlag

- Ja, denn jede Schleife in einem LOOP-Programm läuft nur endlich viele Schritte.

Blatt 2

Aufgabe D

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

- Zu jedem WHILE-Programm gibt es ein äquivalentes LOOP-Programm.

Blatt 2

Aufgabe D

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

- Zu jedem WHILE-Programm gibt es ein äquivalentes LOOP-Programm.

Lösungsvorschlag

- Falsch, zum Beispiel kann die Ackermann-Funktion durch ein WHILE-Programm, aber nicht durch ein LOOP-Programm berechnet werden.

Blatt 2

Aufgabe D

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

- Die Anzahl der Ausführungen von P in der LOOP-Schleife

  $$\texttt{LOOP}\ x_i\ \texttt{DO}\ P\ \texttt{END}$$

  kann beeinflusst werden, indem x_i in P entsprechend modifiziert wird.

Blatt 2

Aufgabe D

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

- Die Anzahl der Ausführungen von P in der LOOP-Schleife

  $$\texttt{LOOP } x_i \texttt{ DO } P \texttt{ END}$$

  kann beeinflusst werden, indem x_i in P entsprechend modifiziert wird.

Lösungsvorschlag

- Nein, die Semantik der LOOP-Anweisung sieht vor, dass der Wort der Variable x_i nur zu Beginn der Schleife geprüft wird. Eine Veränderung des Wertes von x_i in P hat damit keinen Einfluss auf die Anzahl der Durchläufe der Schleife.

Blatt 2

Aufgabe D

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

- Die Ackermannfunktion ist total und damit LOOP-berechenbar.

Blatt 2

Aufgabe D

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

- Die Ackermannfunktion ist total und damit LOOP-berechenbar.

Lösungsvorschlag

- Nein, die Ackermann-Funktion ist zwar total, aber nicht LOOP-berechenbar.

Blatt 3

Aufgabe E

Geben Sie eine Turing-Maschine $\mathcal{A}_{\mathsf{mod2}}$ an, die die Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = (x \bmod 2)$ berechnet. Stellen Sie dabei die Zahlen in unärer Kodierung dar.

Blatt 3

Aufgabe E

Geben Sie eine Turing-Maschine $\mathcal{A}_{\mathsf{mod2}}$ an, die die Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = (x \bmod 2)$ berechnet. Stellen Sie dabei die Zahlen in unärer Kodierung dar.

Lösungsvorschlag

$\mathcal{A}_{\mathsf{mod2}} = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \text{␣}\}, \delta, q_0, \{q_0, q_2\})$, wobei δ gegeben ist durch

$$\begin{array}{rcl} (q_0, \quad \varnothing) & \mapsto & (q_1, \quad \text{␣}, \quad R), \\ (q_1, \quad \varnothing) & \mapsto & (q_0, \quad \text{␣}, \quad R), \\ (q_1, \quad \text{␣}) & \mapsto & (q_2, \quad \varnothing, \quad R). \end{array}$$

Blatt 3

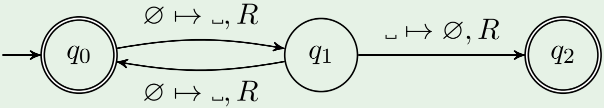
Aufgabe E

Geben Sie eine Turing-Maschine $\mathcal{A}_{\textsf{mod2}}$ an, die die Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = (x \bmod 2)$ berechnet. Stellen Sie dabei die Zahlen in unärer Kodierung dar.

Lösungsvorschlag

$\mathcal{A}_{\textsf{mod2}} = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \textvisiblespace\}, \delta, q_0, \{q_0, q_2\})$, wobei δ gegeben ist durch

$$\begin{array}{llllll} (q_0, & \varnothing) & \mapsto & (q_1, & \textvisiblespace, & R), \\ (q_1, & \varnothing) & \mapsto & (q_0, & \textvisiblespace, & R), \\ (q_1, & \textvisiblespace) & \mapsto & (q_2, & \varnothing, & R). \end{array}$$



Blatt 3

Aufgabe F

Es sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = \lfloor \log_{10}(x) \rfloor$. Geben Sie ein WHILE-Programm an, welches f berechnet.

Blatt 3

Aufgabe F

Es sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = \lfloor \log_{10}(x) \rfloor$. Geben Sie ein WHILE-Programm an, welches f berechnet.

Lösungsvorschlag

$f(x_1)$:

$x_0 \coloneqq 0$
$x_2 \coloneqq \mathrm{div}(x_1, 10)$
while $x_2 \neq 0$ **do**
  $x_0 \coloneqq x_0 + 1$
  $x_2 \coloneqq \mathrm{div}(x_2, 10)$
end while

Aufgabe F

Es sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = \lfloor \log_{10}(x) \rfloor$. Geben Sie ein WHILE-Programm an, welches f berechnet.

Lösungsvorschlag

$f(x_1)$:

- $x_0 \coloneqq 0$
- $x_2 \coloneqq \mathrm{div}(x_1, 10)$
- **while** $x_2 \neq 0$ **do**
  - $x_0 \coloneqq x_0 + 1$
  - $x_2 \coloneqq \mathrm{div}(x_2, 10)$
- **end while**

$\mathrm{div}(x_1, x_2)$:

- $x_3 \coloneqq x_1 + 0$
- $y \coloneqq x_3 + 1$
- $y \coloneqq y - x_2$ $\quad \triangleright\ (x_3 + 1) - x_2 \neq 0 \Leftrightarrow x_3 \geq x_2$
- **while** $y \neq 0$ **do**
  - $x_0 \coloneqq x_0 + 1$
  - $x_3 \coloneqq x_3 - x_2$
  - $y \coloneqq x_3 + 1$
  - $y \coloneqq y - x_2$ $\quad \triangleright\ (x_3 - x_2) \geq x_2$
- **end while**

Blatt 4

Aufgabe G

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

- Die Menge der Instanzen des Postschen Korrespondenzproblems, welche eine Lösung haben, ist semi-entscheidbar.

Blatt 4

Aufgabe G

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

- Die Menge der Instanzen des Postschen Korrespondenzproblems, welche eine Lösung haben, ist semi-entscheidbar.

Lösungsvorschlag

- Ja, falls eine Instanz des PKP eine Lösung besitzt, so kann diese mithilfe einer Breitensuche gefunden werden.

Blatt 4

Aufgabe G

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

- Das Postsche Korrespondenzproblem ist bereits über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ nicht entscheidbar.

Blatt 4

Aufgabe G

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

- Das Postsche Korrespondenzproblem ist bereits über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ nicht entscheidbar.

Lösungsvorschlag

- Ja, jedes Alphabet kann in einem binären Alphabet kodiert werden. Diese Umkodierung ändert nichts an der Unentscheidbarkeit.

Aufgabe G

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

- Es ist entscheidbar, ob eine Turingmaschine nur Wörter akzeptiert, die Palindrome sind. (Ein Palindrom ist ein Wort $w = a_1 \cdots a_n$ mit $a_1 \cdots a_n = a_n \cdots a_1$.)

Blatt 4

Aufgabe G

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

- Es ist entscheidbar, ob eine Turingmaschine nur Wörter akzeptiert, die Palindrome sind. (Ein Palindrom ist ein Wort $w = a_1 \cdots a_n$ mit $a_1 \cdots a_n = a_n \cdots a_1$.)

Lösungsvorschlag

- Nein, die Eigenschaft, dass die Sprache einer Turingmaschine ausschließlich aus Palindromen besteht, ist eine nicht-triviale Eigenschaft semi-entscheidbarer Sprachen. Nach dem Satz von Rice ist sie daher unentscheidbar.

Blatt 4

Aufgabe G

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

- $\mathbf{P}_{\mathsf{halt}}$ ist semi-entscheidbar.

Blatt 4

Aufgabe G

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

- $\mathbf{P}_{\text{halt}}$ ist semi-entscheidbar.

Lösungsvorschlag

- Ja, um zu prüfen, ob eine Turingmaschine auf einem Wort hält, kann deren Berechnung einfach simuliert werden (etwa mithilfe einer universellen Turingmaschine).

Blatt 4

Aufgabe G

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

- Es ist nicht entscheidbar, ob die von einer deterministischen Turing-Maschine berechnete Funktion total ist.

Blatt 4

Aufgabe G

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

- Es ist nicht entscheidbar, ob die von einer deterministischen Turing-Maschine berechnete Funktion total ist.

Lösungsvorschlag

- Ja, denn das Halteproblem kann darauf reduziert werden.

Blatt 4

Aufgabe G

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

- Es gibt reguläre Sprachen, die nicht semi-entscheidbar sind.

Blatt 4

Aufgabe G

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

- Es gibt reguläre Sprachen, die nicht semi-entscheidbar sind.

Lösungsvorschlag

- Nein, zu jeder regulären Sprache **R** gibt es einen endlichen Automaten $\mathcal{A}$ mit $\mathbf{L}(\mathcal{A}) = \mathbf{R}$. Der Automat $\mathcal{A}$ kann von einer Turingmaschine simuliert werden, also sind alle regulären Sprachen entscheidbar.

Blatt 5

Aufgabe H

Sei $\mathbf{L}$ eine unentscheidbare Sprache. Zeigen Sie:

- $\mathbf{L}$ hat eine Teilmenge $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{L}$, die entscheidbar ist.

Blatt 5

Aufgabe H

Sei $\mathbf{L}$ eine unentscheidbare Sprache. Zeigen Sie:

- $\mathbf{L}$ hat eine Teilmenge $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{L}$, die entscheidbar ist.

Lösungsvorschlag

- Wähle $\mathbf{T} = \varnothing$.

Blatt 5

Aufgabe H

Sei **L** eine unentscheidbare Sprache. Zeigen Sie:

- **L** hat eine Obermenge $\mathbf{O} \supseteq \mathbf{L}$, die entscheidbar ist.

Blatt 5

Aufgabe H

Sei **L** eine unentscheidbare Sprache. Zeigen Sie:

- **L** hat eine Obermenge $\mathbf{O} \supseteq \mathbf{L}$, die entscheidbar ist.

Lösungsvorschlag

- Wähle $\mathbf{O} = \Sigma^*$.

Blatt 5

Aufgabe H

Sei **L** eine unentscheidbare Sprache. Zeigen Sie:

- Es gibt jeweils nicht nur eine, sondern unendlich viele solcher entscheidbaren Teilmengen bzw. Obermengen.

Blatt 5

Aufgabe H

Sei **L** eine unentscheidbare Sprache. Zeigen Sie:

- Es gibt jeweils nicht nur eine, sondern unendlich viele solcher entscheidbaren Teilmengen bzw. Obermengen.

Lösungsvorschlag

- Beobachtung: **L** muss unendlich sein (sonst wäre **L** entscheidbar).

Blatt 5

Aufgabe H

Sei **L** eine unentscheidbare Sprache. Zeigen Sie:

- Es gibt jeweils nicht nur eine, sondern unendlich viele solcher entscheidbaren Teilmengen bzw. Obermengen.

Lösungsvorschlag

- Beobachtung: **L** muss unendlich sein (sonst wäre **L** entscheidbar).
- Ebenso muss $\Sigma^* \setminus \mathbf{L}$ unendlich sein.

Blatt 5

Aufgabe H

Sei **L** eine unentscheidbare Sprache. Zeigen Sie:

- Es gibt jeweils nicht nur eine, sondern unendlich viele solcher entscheidbaren Teilmengen bzw. Obermengen.

Lösungsvorschlag

- Beobachtung: **L** muss unendlich sein (sonst wäre **L** entscheidbar).
- Ebenso muss $\Sigma^* \setminus \mathbf{L}$ unendlich sein.
- Dann gibt es unendlich viele endliche Teilmengen $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{L}$, die alle entscheidbar sind.

Blatt 5

Aufgabe H

Sei **L** eine unentscheidbare Sprache. Zeigen Sie:

- Es gibt jeweils nicht nur eine, sondern unendlich viele solcher entscheidbaren Teilmengen bzw. Obermengen.

Lösungsvorschlag

- Beobachtung: **L** muss unendlich sein (sonst wäre **L** entscheidbar).
- Ebenso muss $\Sigma^* \setminus \mathbf{L}$ unendlich sein.
- Dann gibt es unendlich viele endliche Teilmengen $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{L}$, die alle entscheidbar sind.
- Ebenso gibt es unendlich viele endliche Teilmengen $\mathbf{F} \subseteq \Sigma^* \setminus \mathbf{L}$, und alle $\Sigma^* \setminus \mathbf{F} \supseteq \mathbf{L}$ sind entscheidbar.

Blatt 5

Aufgabe I

- Beschreiben Sie mit eigenen Worten die Probleme, die in P liegen.

Blatt 5

Aufgabe I

- Beschreiben Sie mit eigenen Worten die Probleme, die in P liegen.

Lösungsvorschlag

- Probleme in P können von einer polynomiell zeitbeschränkten DTM entschieden werden.

Blatt 5

Aufgabe I

- Beschreiben Sie mit eigenen Worten die Probleme, die in NP liegen.

Blatt 5

Aufgabe I

- Beschreiben Sie mit eigenen Worten die Probleme, die in NP liegen.

Lösungsvorschlag

- Probleme in NP können von einer polynomiell zeitbeschränkten NTM entschieden werden.

Blatt 5

Aufgabe I

- Beschreiben Sie mit eigenen Worten die Probleme, die in PSPACE liegen.

Blatt 5

Aufgabe I

- Beschreiben Sie mit eigenen Worten die Probleme, die in PSpace liegen.

Lösungsvorschlag

- Probleme in PSpace können von einer polynomiell platzbeschränkten DTM entschieden werden.

Blatt 5

Aufgabe I

- Erläutern Sie, warum $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PS}{\small\mathrm{PACE}}$ gilt.

Blatt 5

Aufgabe I

- Erläutern Sie, warum $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$ gilt.

Lösungsvorschlag

- Jede DTM ist auch eine NTM, also $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}$.

Blatt 5

Aufgabe I

- Erläutern Sie, warum $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PS}\textsc{pace}$ gilt.

Lösungsvorschlag

- Jede DTM ist auch eine NTM, also $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}$.
- Eine polynomiell platzbeschränkte DTM kann alle (polynomiell großen) Läufe einer polynomiell zeitbeschränkten NTM simulieren und prüfen, ob einer davon akzeptiert. Also $\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PS}\textsc{pace}$.

Blatt 5

Aufgabe I

- Beschreiben Sie für $\mathcal{C} = \mathrm{NP}$ und $\mathcal{C} = \mathrm{PS}\textsc{pace}$, wann ein Problem „$\mathcal{C}$-hart" bzw. „$\mathcal{C}$-vollständig" ist.

Blatt 5

Aufgabe I

- Beschreiben Sie für $\mathcal{C} = \mathrm{NP}$ und $\mathcal{C} = \mathrm{PS{\small PACE}}$, wann ein Problem „$\mathcal{C}$-hart“ bzw. „$\mathcal{C}$-vollständig“ ist.

Lösungsvorschlag

- Ein Problem ist $\mathcal{C}$-hart, wenn alle Probleme aus $\mathcal{C}$ auf dieses reduziert werden können (in polynomieller Zeit bzw. in logarithmischem Platz).

Blatt 5

Aufgabe I

- Beschreiben Sie für $\mathcal{C} = \mathrm{NP}$ und $\mathcal{C} = \mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$, wann ein Problem „$\mathcal{C}$-hart“ bzw. „$\mathcal{C}$-vollständig“ ist.

Lösungsvorschlag

- Ein Problem ist $\mathcal{C}$-hart, wenn alle Probleme aus $\mathcal{C}$ auf dieses reduziert werden können (in polynomieller Zeit bzw. in logarithmischem Platz).
- Ein Problem ist $\mathcal{C}$-vollständig, wenn es $\mathcal{C}$-hart ist und in $\mathcal{C}$ liegt.

Blatt 6

Aufgabe J

Zeigen Sie, dass NP unter Kleene-Stern abgeschlossen ist.

Blatt 6

Aufgabe J

Zeigen Sie, dass NP unter Kleene-Stern abgeschlossen ist.

Lösungsvorschlag

Sei $\mathbf{L} \in \mathrm{NP}$. Die NTM $\mathcal{M}$ entscheidet $\mathbf{L}^*$ in polynomieller Zeit wie folgt:

Blatt 6

Aufgabe J

Zeigen Sie, dass NP unter Kleene-Stern abgeschlossen ist.

Lösungsvorschlag

Sei $\mathbf{L} \in \mathrm{NP}$. Die NTM $\mathcal{M}$ entscheidet $\mathbf{L}^*$ in polynomieller Zeit wie folgt:
Bei Eingabe w:

Blatt 6

Aufgabe J

Zeigen Sie, dass NP unter Kleene-Stern abgeschlossen ist.

Lösungsvorschlag

Sei $\mathbf{L} \in \mathrm{NP}$. Die NTM $\mathcal{M}$ entscheidet $\mathbf{L}^*$ in polynomieller Zeit wie folgt:
Bei Eingabe w:

- rate nichtdeterministisch $w_1 w_2 \cdots w_n = w$ mit $w_i \in \Sigma^*$

Blatt 6

Aufgabe J

Zeigen Sie, dass NP unter Kleene-Stern abgeschlossen ist.

Lösungsvorschlag

Sei $\mathbf{L} \in \mathrm{NP}$. Die NTM $\mathcal{M}$ entscheidet $\mathbf{L}^*$ in polynomieller Zeit wie folgt:
Bei Eingabe w:

- rate nichtdeterministisch $w_1 w_2 \cdots w_n = w$ mit $w_i \in \Sigma^*$
- teste, ob $w_i \in \mathbf{L}$ für alle $i = 1, \dots, n$

Blatt 6

Aufgabe J

Zeigen Sie, dass NP unter Kleene-Stern abgeschlossen ist.

Lösungsvorschlag

Sei $\mathbf{L} \in \mathrm{NP}$. Die NTM $\mathcal{M}$ entscheidet $\mathbf{L}^*$ in polynomieller Zeit wie folgt:
Bei Eingabe w:

- rate nichtdeterministisch $w_1 w_2 \cdots w_n = w$ mit $w_i \in \Sigma^*$
- teste, ob $w_i \in \mathbf{L}$ für alle $i = 1, \ldots, n$

Falls alle Tests akzeptieren, akzeptiere; sonst verwerfe.

Blatt 6

Aufgabe J

Zeigen Sie, dass NP unter Kleene-Stern abgeschlossen ist.

Lösungsvorschlag

Sei $\mathbf{L} \in \mathrm{NP}$. Die NTM $\mathcal{M}$ entscheidet $\mathbf{L}^*$ in polynomieller Zeit wie folgt:
Bei Eingabe w:

- rate nichtdeterministisch $w_1 w_2 \cdots w_n = w$ mit $w_i \in \Sigma^*$
- teste, ob $w_i \in \mathbf{L}$ für alle $i = 1, \ldots, n$

Falls alle Tests akzeptieren, akzeptiere; sonst verwerfe.
$\mathcal{M}$ ist polynomiell zeitbeschränkt, da jeder der n durchzuführenden Tests „$w_i \in \mathbf{L}$“ polynomiell zeitbeschränkt ist.

Blatt 6

Aufgabe J

Zeigen Sie, dass NP unter Kleene-Stern abgeschlossen ist.

Lösungsvorschlag

Sei $\mathbf{L} \in \mathrm{NP}$. Die NTM $\mathcal{M}$ entscheidet $\mathbf{L}^*$ in polynomieller Zeit wie folgt:
Bei Eingabe w:

- rate nichtdeterministisch $w_1 w_2 \cdots w_n = w$ mit $w_i \in \Sigma^*$
- teste, ob $w_i \in \mathbf{L}$ für alle $i = 1, \ldots, n$

Falls alle Tests akzeptieren, akzeptiere; sonst verwerfe.
$\mathcal{M}$ ist polynomiell zeitbeschränkt, da jeder der n durchzuführenden Tests „$w_i \in \mathbf{L}$" polynomiell zeitbeschränkt ist. Es folgt $\mathbf{L}^* \in \mathrm{NP}$.

Blatt 6

Aufgabe K

Wir betrachten das folgende Problem **K**:

- Gegeben: gerichtete Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$, $k \in \mathbb{N}$.
- Gibt es Teilmengen $V_1' \subseteq V_1$ und $V_2' \subseteq V_2$ mit $|V_1'| = |V_2'| = k$ ist und eine Bijektion $f\colon V_1' \to V_2'$ mit

$$(u, v) \in E_1 \iff (f(u), f(v)) \in E_2? \tag{1}$$

Zeigen Sie $\mathbf{K} \in \mathrm{NP}$.

Blatt 6

Aufgabe K

Wir betrachten das folgende Problem **K**:

- Gegeben: gerichtete Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$, $k \in \mathbb{N}$.
- Gibt es Teilmengen $V_1' \subseteq V_1$ und $V_2' \subseteq V_2$ mit $|V_1'| = |V_2'| = k$ ist und eine Bijektion $f\colon V_1' \to V_2'$ mit

$$(u, v) \in E_1 \iff (f(u), f(v)) \in E_2? \tag{1}$$

Zeigen Sie **K** $\in \mathrm{NP}$.

Lösungsvorschlag

- **K** $\in \mathrm{NP}$, da die Teilmengen V_1', V_2' und Zuordnung $f : V_1' \to V_2'$ nichtdeterministisch geraten werden können und dann in polynomieller Zeit die Eigenschaft (1) getestet werden kann.

Blatt 6

Aufgabe K

Zeigen Sie **CLIQUE** $\leq_p$ **K**, d.h. **K** ist NP-hart.

Blatt 6

Aufgabe K

Zeigen Sie **CLIQUE** $\leq_p$ **K**, d.h. **K** ist NP-hart.

Lösungsvorschlag

- Sei G Graph der Größe $n \in \mathbb{N}$, K_n vollständiger Graph auf n Knoten.

Blatt 6

Aufgabe K

Zeigen Sie **CLIQUE** $\leq_p$ **K**, d.h. **K** ist NP-hart.

Lösungsvorschlag

- Sei G Graph der Größe $n \in \mathbb{N}$, K_n vollständiger Graph auf n Knoten.
- Setze $f(\mathsf{enc}(G)\#\#\,\mathsf{enc}(k)) = \mathsf{enc}(G)\#\#\,\mathsf{enc}(K_n)\#\#\,\mathsf{enc}(k)$.

Blatt 6

Aufgabe K

Zeigen Sie **CLIQUE** $\leq_p$ **K**, d.h. **K** ist NP-hart.

Lösungsvorschlag

- Sei G Graph der Größe $n \in \mathbb{N}$, K_n vollständiger Graph auf n Knoten.
- Setze $f(\mathsf{enc}(G)\#\#\,\mathsf{enc}(k)) = \mathsf{enc}(G)\#\#\,\mathsf{enc}(K_n)\#\#\,\mathsf{enc}(k)$.
- $\mathsf{enc}(G)\#\#\,\mathsf{enc}(k) \in$ **CLIQUE** gdw. $f(\mathsf{enc}(G)\#\#\,\mathsf{enc}(k)) \in$ **K**, und f ist polynomiell zeitbeschränkt.

Blatt 6

Aufgabe K

Zeigen Sie **CLIQUE** $\leq_p$ **K**, d.h. **K** ist NP-hart.

Lösungsvorschlag

- Sei G Graph der Größe $n \in \mathbb{N}$, K_n vollständiger Graph auf n Knoten.
- Setze $f(\mathsf{enc}(G)\#\#\,\mathsf{enc}(k)) = \mathsf{enc}(G)\#\#\,\mathsf{enc}(K_n)\#\#\,\mathsf{enc}(k)$.
- $\mathsf{enc}(G)\#\#\,\mathsf{enc}(k) \in$ **CLIQUE** gdw. $f(\mathsf{enc}(G)\#\#\,\mathsf{enc}(k)) \in$ **K**, und f ist polynomiell zeitbeschränkt.
- Also ist **K** auch NP-hart.

Blatt 7

Aufgabe L

Zeigen Sie: Ist $\mathbf{L}_2 \in \mathrm{PS}\textsc{pace}$ und $\mathbf{L}_1 \leq_p \mathbf{L}_2$, so ist auch $\mathbf{L}_1 \in \mathrm{PS}\textsc{pace}$.

Blatt 7

Aufgabe L

Zeigen Sie: Ist $\mathbf{L}_2 \in \mathrm{PS}\textsc{pace}$ und $\mathbf{L}_1 \leq_p \mathbf{L}_2$, so ist auch $\mathbf{L}_1 \in \mathrm{PS}\textsc{pace}$.

Lösungsvorschlag

- Seien $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ DTM mit
  - $\mathcal{M}$ polynomiell platzbeschränkter Entscheider für $\mathbf{L}_2$, und

Blatt 7

Aufgabe L

Zeigen Sie: Ist $\mathbf{L}_2 \in \text{PS}\textsc{pace}$ und $\mathbf{L}_1 \leq_p \mathbf{L}_2$, so ist auch $\mathbf{L}_1 \in \text{PS}\textsc{pace}$.

Lösungsvorschlag

- Seien $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ DTM mit
  - $\mathcal{M}$ polynomiell platzbeschränkter Entscheider für $\mathbf{L}_2$, und
  - $\mathcal{N}$ berechnet die Reduktion $\mathbf{L}_1 \leq_p \mathbf{L}_2$ in polynomieller Zeit.

Blatt 7

Aufgabe L

Zeigen Sie: Ist $\mathsf{L}_2 \in \mathrm{PS}\textsc{pace}$ und $\mathsf{L}_1 \leq_p \mathsf{L}_2$, so ist auch $\mathsf{L}_1 \in \mathrm{PS}\textsc{pace}$.

Lösungsvorschlag

- Seien $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ DTM mit
  - $\mathcal{M}$ polynomiell platzbeschränkter Entscheider für L_2, und
  - $\mathcal{N}$ berechnet die Reduktion $\mathsf{L}_1 \leq_p \mathsf{L}_2$ in polynomieller Zeit.
- Die DTM $\mathcal{M}'$ entscheidet L_1 wie folgt: Bei Eingabe w:

Blatt 7

Aufgabe L

Zeigen Sie: Ist $\mathbf{L}_2 \in \textsc{PSpace}$ und $\mathbf{L}_1 \leq_p \mathbf{L}_2$, so ist auch $\mathbf{L}_1 \in \textsc{PSpace}$.

Lösungsvorschlag

- Seien $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ DTM mit
  - $\mathcal{M}$ polynomiell platzbeschränkter Entscheider für $\mathbf{L}_2$, und
  - $\mathcal{N}$ berechnet die Reduktion $\mathbf{L}_1 \leq_p \mathbf{L}_2$ in polynomieller Zeit.
- Die DTM $\mathcal{M}'$ entscheidet $\mathbf{L}_1$ wie folgt: Bei Eingabe w:
  - Berechne das Ergebnis w' von $\mathcal{N}$ und simuliere $\mathcal{M}$ auf Eingabe w'.

Blatt 7

Aufgabe L

Zeigen Sie: Ist $\mathbf{L}_2 \in \textsc{PSpace}$ und $\mathbf{L}_1 \leq_p \mathbf{L}_2$, so ist auch $\mathbf{L}_1 \in \textsc{PSpace}$.

Lösungsvorschlag

- Seien $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ DTM mit
  - $\mathcal{M}$ polynomiell platzbeschränkter Entscheider für $\mathbf{L}_2$, und
  - $\mathcal{N}$ berechnet die Reduktion $\mathbf{L}_1 \leq_p \mathbf{L}_2$ in polynomieller Zeit.
- Die DTM $\mathcal{M}'$ entscheidet $\mathbf{L}_1$ wie folgt: Bei Eingabe w:
  - Berechne das Ergebnis w' von $\mathcal{N}$ und simuliere $\mathcal{M}$ auf Eingabe w'.
  - Akzeptiere, falls $\mathcal{M}$ akzeptiert, verwerfe sonst.

Blatt 7

Aufgabe L

Zeigen Sie: Ist $\mathbf{L}_2 \in \text{PSPACE}$ und $\mathbf{L}_1 \leq_p \mathbf{L}_2$, so ist auch $\mathbf{L}_1 \in \text{PSPACE}$.

Lösungsvorschlag

- Seien $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ DTM mit
  - $\mathcal{M}$ polynomiell platzbeschränkter Entscheider für $\mathbf{L}_2$, und
  - $\mathcal{N}$ berechnet die Reduktion $\mathbf{L}_1 \leq_p \mathbf{L}_2$ in polynomieller Zeit.
- Die DTM $\mathcal{M}'$ entscheidet $\mathbf{L}_1$ wie folgt: Bei Eingabe w:
  - Berechne das Ergebnis w' von $\mathcal{N}$ und simuliere $\mathcal{M}$ auf Eingabe w'.
  - Akzeptiere, falls $\mathcal{M}$ akzeptiert, verwerfe sonst.
- $\mathcal{N}$ arbeitet in polynomieller Zeit, also ist w' polynomiell groß in der Länge von w, und $\mathcal{M}$ ist polynomiell platzbeschränkt in $|w'|$.

Blatt 7

Aufgabe L

Zeigen Sie: Ist $\mathbf{L}_2 \in \text{PSPACE}$ und $\mathbf{L}_1 \leq_p \mathbf{L}_2$, so ist auch $\mathbf{L}_1 \in \text{PSPACE}$.

Lösungsvorschlag

- Seien $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ DTM mit
  - $\mathcal{M}$ polynomiell platzbeschränkter Entscheider für $\mathbf{L}_2$, und
  - $\mathcal{N}$ berechnet die Reduktion $\mathbf{L}_1 \leq_p \mathbf{L}_2$ in polynomieller Zeit.
- Die DTM $\mathcal{M}'$ entscheidet $\mathbf{L}_1$ wie folgt: Bei Eingabe w:
  - Berechne das Ergebnis w' von $\mathcal{N}$ und simuliere $\mathcal{M}$ auf Eingabe w'.
  - Akzeptiere, falls $\mathcal{M}$ akzeptiert, verwerfe sonst.
- $\mathcal{N}$ arbeitet in polynomieller Zeit, also ist w' polynomiell groß in der Länge von w, und $\mathcal{M}$ ist polynomiell platzbeschränkt in $|w'|$.
- Damit ist auch $\mathcal{M}'$ polynomiell platzbeschränkt.

Blatt 7

Aufgabe L

Zeigen Sie: Ist $\mathbf{L}_2 \in \text{PSPACE}$ und $\mathbf{L}_1 \leq_p \mathbf{L}_2$, so ist auch $\mathbf{L}_1 \in \text{PSPACE}$.

Lösungsvorschlag

- Seien $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ DTM mit
  - $\mathcal{M}$ polynomiell platzbeschränkter Entscheider für $\mathbf{L}_2$, und
  - $\mathcal{N}$ berechnet die Reduktion $\mathbf{L}_1 \leq_p \mathbf{L}_2$ in polynomieller Zeit.
- Die DTM $\mathcal{M}'$ entscheidet $\mathbf{L}_1$ wie folgt: Bei Eingabe w:
  - Berechne das Ergebnis w' von $\mathcal{N}$ und simuliere $\mathcal{M}$ auf Eingabe w'.
  - Akzeptiere, falls $\mathcal{M}$ akzeptiert, verwerfe sonst.
- $\mathcal{N}$ arbeitet in polynomieller Zeit, also ist w' polynomiell groß in der Länge von w, und $\mathcal{M}$ ist polynomiell platzbeschränkt in $|w'|$.
- Damit ist auch $\mathcal{M}'$ polynomiell platzbeschränkt.
- $\mathcal{M}'$ akzeptiert w gdw. $\mathcal{M}$ akzeptiert w' gdw. $w' \in \mathbf{L}_2$ gdw.$w \in \mathbf{L}_1$.

Blatt 7

Aufgabe L

Zeigen Sie: Ist $\mathbf{L}_1$ $\mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$-hart und $\mathbf{L}_1 \leq_p \mathbf{L}_2$, dann ist $\mathbf{L}_2$ $\mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$-hart.

Blatt 7

Aufgabe L

Zeigen Sie: Ist $\mathbf{L}_1$ $\textsc{PSpace}$-hart und $\mathbf{L}_1 \leq_p \mathbf{L}_2$, dann ist $\mathbf{L}_2$ $\textsc{PSpace}$-hart.

Lösungsvorschlag

- Sei $\mathbf{L} \in \textsc{PSpace}$.

Blatt 7

Aufgabe L

Zeigen Sie: Ist $\mathbf{L}_1$ PSPACE-hart und $\mathbf{L}_1 \leq_p \mathbf{L}_2$, dann ist $\mathbf{L}_2$ PSPACE-hart.

Lösungsvorschlag

- Sei $\mathbf{L} \in$ PSPACE.
- Dann ist $\mathbf{L} \leq_p \mathbf{L}_1 \leq_p \mathbf{L}_2$,

Blatt 7

Aufgabe L

Zeigen Sie: Ist $\mathbf{L}_1$ $\textsc{PSpace}$-hart und $\mathbf{L}_1 \leq_p \mathbf{L}_2$, dann ist $\mathbf{L}_2$ $\textsc{PSpace}$-hart.

Lösungsvorschlag

- Sei $\mathbf{L} \in \textsc{PSpace}$.
- Dann ist $\mathbf{L} \leq_p \mathbf{L}_1 \leq_p \mathbf{L}_2$,
- also $\mathbf{L} \leq_p \mathbf{L}_2$.

Blatt 7

Aufgabe L

Zeigen Sie: Ist $\mathbf{L}_1$ $\textsc{PSpace}$-hart und $\mathbf{L}_1 \leq_p \mathbf{L}_2$, dann ist $\mathbf{L}_2$ $\textsc{PSpace}$-hart.

Lösungsvorschlag

- Sei $\mathbf{L} \in \textsc{PSpace}$.
- Dann ist $\mathbf{L} \leq_p \mathbf{L}_1 \leq_p \mathbf{L}_2$,
- also $\mathbf{L} \leq_p \mathbf{L}_2$.
- Es ist also jedes Problem in $\textsc{PSpace}$ auf $\mathbf{L}_2$ in polynomieller Zeit reduzierbar und damit ist $\mathbf{L}_2$ auch $\textsc{PSpace}$-hart.