TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

FORMALE SYSTEME

11. Vorlesung: Von regulären zu kontextfreien Sprachen

Markus Krötzsch

TU Dresden, 17. November 2016

Probleme auf Automaten

Wiederholung

Einige wichtige Probleme für Automaten:

Problem	Fragestellung	Komplexität
Leerheit	$\mathbf{L}(\mathcal{M}) \stackrel{?}{=} \emptyset$	polynomiell
Inklusion	$\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \stackrel{?}{\subseteq} \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$	polynomiell falls $\mathcal{M}_2$ DFA exponentiell falls $\mathcal{M}_2$ NFA
Äquivalenz	$\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \stackrel{?}{=} \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$	polynomiell falls $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ DFA exponentiell falls $\mathcal{M}_1$ oder $\mathcal{M}_2$ NFA

Das Wortproblem für reguläre Sprachen

Das Wortproblem für DFAs kann in polynomieller Zeit entschieden werden.

Beweis: Es genügt, den DFA für $|w|$ Schritte zu simulieren und zu prüfen, ob danach ein Endzustand erreicht ist. Die Berechnung von $\delta(q, \mathrm{a})$ ist in polynomieller Zeit möglich – die Details hängen davon ab, wie genau $\mathcal{M}$ in der Eingabe kodiert wurde. □

Das Wortproblem für reguläre Sprachen kann in linearer Zeit $O(|w|)$ entschieden werden.

Beweis: Man kann den DFA als gegeben annehmen, so dass die Berechnung von $\delta(q, \mathrm{a})$ in konstanter Zeit erfolgen kann. Die Simulation benötigt daher insgesamt $|w|$ Rechenschritte. □

Das Wortproblem für NFAs

Was tun, wenn ein NFA gegeben ist?

Variante 1: NFA in DFA umwandeln (Potenzmengenkonstruktion), Wortproblem für DFA lösen
Exponentieller Algorithmus: Potenzmengen-DFA ist exponentiell groß

Variante 2: NFA direkt mit Zustandsmengen simulieren (vergleichbar „on-the-fly Version von Variante 1“)
Polynomieller Algorithmus: Zustandsmengen sind von linearer Größe; Berechnung der Nachfolgemenge als Vereinigung linear vieler δ-Ergebnismengen

Variante 3: Konstruiere einen DFA $\mathcal{M}_w$ mit $\mathbf{L}(\mathcal{M}_w) = \{w\}$ und prüfe ob $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}_w \neq \emptyset$
Polynomieller Algorithmus: $\mathcal{M}_w$ ist linear in $|w|$; Schnittmengen-DFA ist quadratisch groß; Leerheitstest ist polynomiell in dieser Größe

Details: Variante 2

Eingabe: NFA $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F \rangle$ und Wort w
Ausgabe: Ist $w \in \mathbf{L}(\mathcal{M})$?

- Initialisiere $Z := Q_0$
- Für jedes Symbol σ_i in $w = \sigma_1 \cdots \sigma_{|w|}$:
  Berechne $Z := \bigcup_{q \in Z} \delta(q, \sigma_i)$
- Für alle $q \in F$:
  Falls $q \in Z$: das Ergebnis ist „ja“
- Falls kein $q \in F \cap Z$ gefunden wurde: das Ergebnis ist „nein“

Alle Teilberechnungen können in polynomieller Zeit ausgeführt werden, sofern $\mathcal{M}$ „vernünftig“ kodiert wird

Das Wortproblem für NFAs

Was tun, wenn ein NFA gegeben ist?

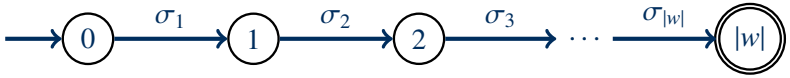
Variante 1: NFA in DFA umwandeln (Potenzmengenkonstruktion), Wortproblem für DFA lösen
Exponentieller Algorithmus: Potenzmengen-DFA ist exponentiell groß

Variante 2: NFA direkt mit Zustandsmengen simulieren (vergleichbar „on-the-fly Version von Variante 1“)
Polynomieller Algorithmus: Zustandsmengen sind von linearer Größe; Berechnung der Nachfolgemenge als Vereinigung linear vieler δ-Ergebnismengen

Variante 3: Konstruiere einen DFA $\mathcal{M}_w$ mit $\mathbf{L}(\mathcal{M}_w) = \{w\}$ und prüfe ob $\mathbf{L}(\mathcal{M}) \cap \mathbf{L}(\mathcal{M}_w) \neq \emptyset$
Polynomieller Algorithmus: $\mathcal{M}_w$ ist linear in $|w|$; Schnittmengen-DFA ist quadratisch groß; Leerheitstest ist polynomiell in dieser Größe

Details: Variante 3

Der Automat $\mathcal{M}_w$ für $w = \sigma_1 \cdots \sigma_{|w|}$ ist leicht gefunden:



Eingabe: NFA $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F \rangle$ und Wort w
Ausgabe: Ist $w \in \mathbf{L}(\mathcal{M})$?

(1) Konstruiere $\mathcal{M}_w$
(2) Berechne Produktautomat $\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}_w$
(3) Entscheide ob $(\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}_w) \neq \emptyset$

Das Wortproblem für NFAs

Was tun, wenn ein NFA gegeben ist?

Variante 1: NFA in DFA umwandeln (Potenzmengenkonstruktion), Wortproblem für DFA lösen
Exponentieller Algorithmus: Potenzmengen-DFA ist exponentiell groß

Variante 2: NFA direkt mit Zustandsmengen simulieren (vergleichbar „on-the-fly Version von Variante 1“)
Polynomieller Algorithmus: Zustandsmengen sind von linearer Größe; Berechnung der Nachfolgemenge als Vereinigung linear vieler δ-Ergebnismengen

Variante 3: Konstruiere einen DFA $\mathcal{M}_w$ mit $\mathbf{L}(\mathcal{M}_w) = \{w\}$ und prüfe ob $\mathbf{L}(\mathcal{M}) \cap \mathbf{L}(\mathcal{M}_w) \neq \emptyset$
Polynomieller Algorithmus: $\mathcal{M}_w$ ist linear in $|w|$; Schnittmengen-DFA ist quadratisch groß; Leerheitstest ist polynomiell in dieser Größe

Wortproblem für NFAs – Komplexität

Variante 1: NFA in DFA umwandeln (Potenzmengenkonstruktion), Wortproblem für DFA lösen

Variante 2: NFA direkt mit Zustandsmengen simulieren (vergleichbar „on-the-fly Version von Variante 1“)

Variante 3: Konstruiere einen DFA $\mathcal{M}_w$ mit $\mathbf{L}(\mathcal{M}_w) = \{w\}$ und prüfe ob $\mathbf{L}(\mathcal{M}) \cap \mathbf{L}(\mathcal{M}_w) \neq \emptyset$

Mit Variante 2 und 3 erhalten wir:

Satz: Das Wortproblem für NFAs kann in polynomieller Zeit entschieden werden.

Weitere Probleme für Automaten

Das Endlichkeitsproblem für FAs über Alphabet Σ besteht darin, die folgende Funktion zu berechnen:

Eingabe: ein FA $\mathcal{M}$
Ausgabe: „ja“ wenn $\mathbf{L}(\mathcal{M})$ endlich ist; andernfalls „nein“

Idee wie Pumping-Lemma: unendliche Sprachen erfordern Zyklus
$\rightsquigarrow$ suche nach Zyklen, die auf einem Pfad von einem Start- zu einem Endzustand liegen (polynomiell)

Das Universalitätsproblem für FAs über Alphabet Σ besteht darin, die folgende Funktion zu berechnen:

Eingabe: ein FA $\mathcal{M}$
Ausgabe: „ja“ wenn $\mathbf{L}(\mathcal{M}) = \Sigma^*$; andernfalls „nein“

Komplement des Leerheitsproblems: $\mathbf{L}(\mathcal{M}) = \Sigma^*$ wenn $\mathbf{L}(\overline{\mathcal{M}}) = \emptyset$
$\rightsquigarrow$ Komplexität abhängig von FA-Komplementierung

Zusammenfassung

Einige wichtige Probleme für Automaten:

Problem	Fragestellung	Komplexität
Leerheit	$\mathbf{L}(\mathcal{M}) \stackrel{?}{=} \emptyset$	polynomiell
Inklusion	$\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \stackrel{?}{\subseteq} \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$	polynomiell falls $\mathcal{M}_2$ DFA exponentiell falls $\mathcal{M}_2$ NFA
Äquivalenz	$\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \stackrel{?}{=} \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$	polynomiell falls $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ DFA exponentiell falls $\mathcal{M}_1$ oder $\mathcal{M}_2$ NFA
Wortproblem	$w \stackrel{?}{\in} \mathbf{L}(\mathcal{M})$	polynomiell
Universalität	$\mathbf{L}(\mathcal{M}) \stackrel{?}{=} \Sigma^*$	polynomiell falls $\mathcal{M}$ DFA exponentiell falls $\mathcal{M}$ NFA
Endlichkeit	$\mathbf{L}(\mathcal{M})$ endlich?	polynomiell

Viereinhalb Wochen reguläre Sprachen

auf sieben Folien

Die Chomsky-Hierarchie

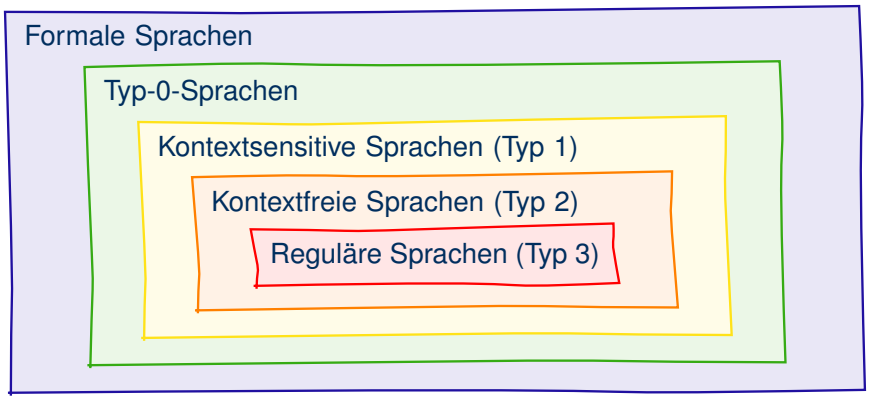
Die Chomsky-Hierarchie unterteilt Grammatiken in vier Stufen:

- **Typ 0**: beliebige Grammatiken
- **Typ 1**: kontextsensitive Grammatiken:
  (a) Alle Regeln $w \to v$ erfüllen die Bedingung $|w| \leq |v|$.
  (b) Es gibt eine Regel $S \to \epsilon$ und alle anderen Regeln $w \to v$ enthalten kein S in v und erfüllen $|w| \leq |v|$.
- **Typ 2**: kontextfreie Grammatiken:
  Alle Regeln haben die Form $A \to v$ für eine Variable A.
- **Typ 3**: reguläre Grammatiken:
  Alle Regeln haben eine der Formen

$$A \to cB \qquad A \to c \qquad A \to \epsilon$$

  wobei A und B Variablen sind und c ein Terminalsymbol ist.

Chomsky's Hierarchie ist eine Hierarchie



(Dafür mussten wir Typ-1 erweitern und ϵ-Regeln bei Typ-2 eliminieren.)

Automaten

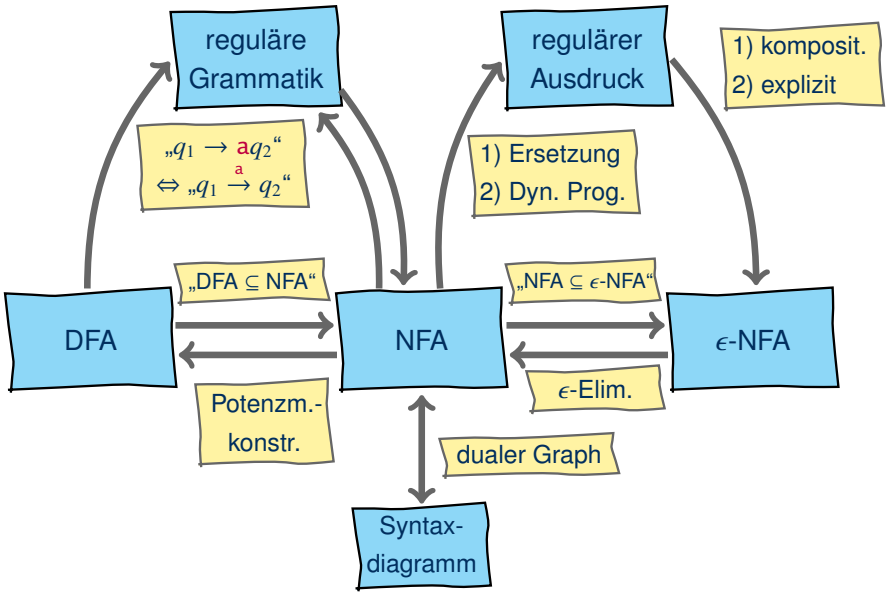
Wir kennen mehrere Varianten endlicher Automaten:

- Deterministischer endlicher Automat (DFA)
  - mit totaler Übergangsfunktion
- Nichtdeterministischer endlicher Automat (NFA)
  - mit ϵ-Übergängen
  - mit Wortübergängen
  - mit Übergängen für reguläre Ausdrücke (nur für Umwandlung reg. Ausdruck $\to$ ϵ-NFA)

Die Sprache eines Automaten haben wir auf zwei Arten definiert

- Mithilfe einer verallgemeinerten Übergangsfunktion, die ganze Wörter einliest
- Durch akzeptierende Läufe, die einem Wort zugeordnet werden können

Darstellungen von Typ-3-Sprachen



Umformungsalgorithmen (1)

Eingabe	Ausgabe	V.
kontextfreie Grammatik	ϵ-freie kontextfreie Grammatik	2
DFA $\mathcal{M}$	totaler DFA $\mathcal{M}_{\text{total}}$	3
DFA $\mathcal{M}$	reguläre Grammatik $G_{\mathcal{M}}$	3
Syntaxdiagramm	NFA	4
NFA $\mathcal{M}$	Potenzmengen-DFA $\mathcal{M}_{\text{DFA}}$	4
reguläre Grammatik G	NFA $\mathcal{M}_G$	5
NFA mit Wortübergängen	ϵ-NFA	5
ϵ-NFA $\mathcal{M}$	NFA $\text{elim}_\epsilon(\mathcal{M})$	5

Umformungsalgorithmen (2)

Eingabe	Ausgabe	V.
NFAs $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$	Vereinigungs-NFA $\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$	5
NFAs/DFAs $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$	Produkt-NFA/DFA $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$	5
totaler DFA $\mathcal{M}$	Komplement-DFA $\overline{\mathcal{M}}$	5
NFAs $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$	ϵ-NFA $\mathcal{M}_1 \odot \mathcal{M}_2$ für Konkatenation	5
NFA $\mathcal{M}$	ϵ-NFA $\mathcal{M}^*$ für Kleene-Abschluss	5
regulärer Ausdruck	ϵ-NFA (Komposition)	6
regulärer Ausdruck	ϵ-NFA (explizit)	6
NFA	regulärer Ausdruck (Gleichungssystem)	7
NFA	regulärer Ausdruck (dyn. Programmierung)	7
totaler DFA $\mathcal{M}$	Quotienten-DFA $\mathcal{M}/_\sim$	8
totaler DFA $\mathcal{M}$	reduzierter DFA $\mathcal{M}_r$	8

Reguläre Sprachen

Die Menge der regulären Sprachen ist ...

- die Menge genau all jener Sprachen ...
  - die von einer Typ-3-Grammatik beschrieben werden
  - die von einem DFA erkannt werden
  - die von einem NFA erkannt werden
  - die durch einen regulären Ausdruck beschrieben werden
  - die endlich viele Myhill-Nerode-Kongruenzklassen haben
- die kleinste Menge von Sprachen ...
  - welche alle endlichen Sprachen enthält und unter $\cap$, $\cup$, $\overline{\ }$, $\circ$ und * abgeschlossen ist
  - welche die Sprachen $\emptyset$, $\{\epsilon\}$ und $\{a\}$ ($a \in \Sigma$) enthält und unter $\cup$, $\circ$ und * abgeschlossen ist

Alle endlichen Sprachen sind regulär (aber nicht umgekehrt)

Alle regulären Sprachen erlauben Pumping (aber nicht umgekehrt)

Kontextfreie Sprachen

Kontextfreie Sprachen

Wir hatten kontextfreie Sprachen wie folgt definiert:

Eine kontextfreie Grammatik (oder Typ-2-Grammatik oder CFG) enthält nur Regeln der Form $A \to v$, wobei A eine Variable ist.

Eine Sprache ist kontextfrei (oder Typ 2), wenn sie durch eine kontextfreie Grammatik dargestellt werden kann.

Das genügt, um nichtreguläre Sprachen darzustellen:

Beispiel: Die Sprache $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ ist kontextfrei, da sie durch die folgende CFG dargestellt werden kann:

$$S \to \epsilon \mid aSb$$

(Übung: Beweise, dass die Grammatik wirklich diese Sprache darstellt.)

Beispiel

CFGs eignen sich zur Darstellung vollständig geklammerter Ausdrücke.

Beispiel: Vollständig geklammerte reguläre Ausdrücke über Alphabet $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ sind als CFG über dem Alphabet $\Sigma \cup \{\emptyset, \epsilon, (,), |, ^*\}$ darstellbar:

$$S \to \emptyset \mid \epsilon \mid A \mid (SS) \mid (S|S) \mid (S)^*$$
$$A \to \sigma_1 \mid \ldots \mid \sigma_n$$

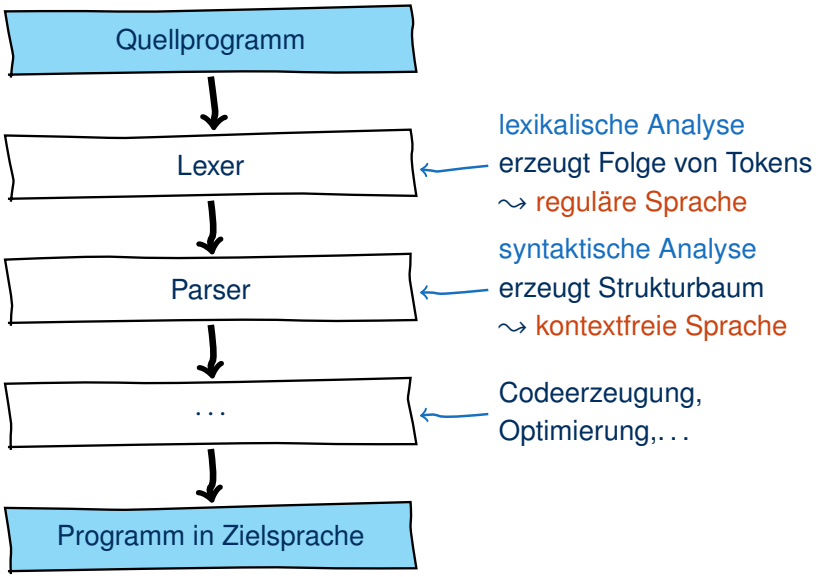
Allgemein ist die Beschreibung korrekt geklammerter Ausdrücke für viele Sprachen sehr wichtig, nicht zuletzt für Programmiersprachen

Ein praktisches Beispiel . . .

Kontextfreie Grammatik für XML 1.1 (in W3C EBNF):

```
[1]    document          ::= prolog element Misc* - Char* RestrictedChar Char*
[2]    Char              ::= [#x1-#xD7FF] | [#xE000-#xFFFD] | [#x10000-#x10FFFF] /* any Unicode character, excluding the surrogate blocks, FFFE, and FFFF. */
[2a]   RestrictedChar    ::= [#x1-#x8] | [#xB-#xC] | [#xE-#x1F] | [#x7F-#x84] | [#x86-#x9F]
[3]    S                 ::= #x20 | #x9 | #xA+
[4]    NameStartChar     ::= ":" | [A-Z] | "_" | [a-z] | [#xC0-#xD6] | [#xD8-#xF6] | [#xF8-#x2FF] | [#x370-#x37D] | [#x37F-#x1FFF] | [#x200C-#x200D] | [#x2070-#x218F] | [#x2C00-#x2FEF] | [#x3001-#xD7FF] | [#xF900-#xFDCF] | [#xFDF0-#xFFFD] | [#x10000-#xEFFFF]
[4a]   NameChar          ::= NameStartChar | "-" | "." | [0-9] | #xB7 | [#x0300-#x036F] | [#x203F-#x2040]
[5]    Name              ::= NameStartChar (NameChar)*
[6]    Names             ::= Name (#x20 Name)*
[7]    Nmtoken           ::= (NameChar)+
[8]    Nmtokens          ::= Nmtoken (#x20 Nmtoken)*
[9]    EntityValue       ::= '"' ([^%&"] | PEReference | Reference)* '"' | "'" ([^%&'] | PEReference | Reference)* "'"
[10]   AttValue          ::= '"' ([^<&"] | Reference)* '"' | "'" ([^<&'] | Reference)* "'"
[11]   SystemLiteral     ::= ('"' [^"]* '"') | ("'" [^']* "'")
[12]   PubidLiteral      ::= '"' PubidChar* '"' | "'" (PubidChar - "'")* "'"
[13]   PubidChar         ::= #x20 | #xD | #xA | [a-zA-Z0-9] | [-'()+,./:=?;!*#@$_%]
[14]   CharData          ::= [^<&]* - ([^<&]* ']]>' [^<&]*)
[15]   Comment           ::= '<!--' ((Char - '-') | ('-' (Char - '-')))* '-->'
[16]   PI                ::= '<?' PITarget (S (Char* - (Char* '?>' Char*)))? '?>'
[17]   PITarget          ::= Name - (('X' | 'x') ('M' | 'm') ('L' | 'l'))
[18]   CDSect            ::= CDStart CData CDEnd
[19]   CDStart           ::= '<![CDATA['
[20]   CData             ::= (Char* - (Char* ']]>' Char*))
[21]   CDEnd             ::= ']]>'
[22]   prolog            ::= XMLDecl Misc* (doctypedecl Misc*)?
[23]   XMLDecl           ::= '<?xml' VersionInfo EncodingDecl? SDDecl? S?'?>'
[24]   VersionInfo       ::= S 'version' Eq ("'" VersionNum "'" | '"' VersionNum '"')
[25]   Eq                ::= S? '=' S?
[26]   VersionNum        ::= '1.1'
[27]   Misc              ::= Comment | PI | S
[28]   doctypedecl       ::= '<!DOCTYPE' S Name (S ExternalID)? S? ('[' intSubset ']' S?)? '>'
[28a]  DeclSep           ::= PEReference | S
[28b]  intSubset         ::= (markupdecl | DeclSep)*
[29]   markupdecl        ::= elementdecl | AttlistDecl | EntityDecl | NotationDecl | PI | Comment
[30]   extSubset         ::= TextDecl? extSubsetDecl
[31]   extSubsetDecl     ::= ( markupdecl | conditionalSect | DeclSep)*
[32]   SDDecl            ::= #x20+ 'standalone' Eq (("'" ('yes' | 'no') "'") | ('"' ('yes' | 'no') '"'))
(Productions 33 through 38 have been removed.)
[39]   element           ::= EmptyElemTag
[40]   STag              ::= '<' Name (S Attribute)* S? '>'
[41]   Attribute         ::= Name Eq AttValue
[42]   ETag              ::= '</' Name S? '>'
[43]   content           ::= CharData? ((element | Reference | CDSect | PI | Comment) CharData?)*
[44]   EmptyElemTag      ::= '<' Name (S Attribute)* S? '/>'
[45]   elementdecl       ::= '<!ELEMENT' S Name S contentspec S? '>'
[46]   contentspec       ::= 'EMPTY' | 'ANY' | Mixed | children
[47]   children          ::= (choice | seq) ('?' | '*' | '+')?
[48]   cp                ::= (Name | choice | seq) ('?' | '*' | '+')?
[49]   choice            ::= '(' S? cp ( S? '|' S? cp )+ S? ')'
[50]   seq               ::= '(' S? cp ( S? ',' S? cp )* S? ')'
[51]   Mixed             ::= '(' S? '#PCDATA' (S? '|' S? Name)* S? ')*' | '(' S? '#PCDATA' S? ')'
[52]   AttlistDecl       ::= '<!ATTLIST' S Name AttDef* S? '>'
[53]   AttDef            ::= S Name S AttType S DefaultDecl
[54]   AttType           ::= StringType | TokenizedType | EnumeratedType
[55]   StringType        ::= 'CDATA'
[56]   TokenizedType     ::= 'ID' | 'IDREF' | 'IDREFS' | 'ENTITY' | 'ENTITIES' | 'NMTOKEN' | 'NMTOKENS'
[57]   EnumeratedType    ::= NotationType | Enumeration
[58]   NotationType      ::= 'NOTATION' S '(' S? Name (S? '|' S? Name)* S? ')'
[59]   Enumeration       ::= '(' S? Nmtoken (S? '|' S? Nmtoken)* S? ')'
[60]   DefaultDecl       ::= '#REQUIRED' | '#IMPLIED' | ((''#FIXED' S)? AttValue)
[61]   conditionalSect   ::= includeSect | ignoreSect
[62]   includeSect       ::= '<![' S? 'INCLUDE' S? '[' extSubsetDecl ']]>'
[63]   ignoreSect        ::= '<![' S? 'IGNORE' S? '[' ignoreSectContents* ']]>'
[64]   ignoreSectContents::= Ignore ('<![' ignoreSectContents ']]>' Ignore)*
[65]   Ignore            ::= Char* - (Char* ('<![' | ']]>') Char*)
[66]   CharRef           ::= '&#' [0-9]+ ';' | '&#x' [0-9a-fA-F]+ ';'
[67]   Reference         ::= EntityRef | CharRef
[68]   EntityRef         ::= '&' Name ';'
[69]   PEReference       ::= '%' Name ';'
[70]   EntityDecl        ::= GEDecl | PEDecl
[71]   GEDecl            ::= '<!ENTITY' S Name S EntityDef S? '>'
[72]   PEDecl            ::= '<!ENTITY' S '%' S Name S PEDef S? '>'
[73]   EntityDef         ::= EntityValue| (ExternalID NDataDecl?)
[74]   PEDef             ::= EntityValue | ExternalID
[75]   ExternalID        ::= 'SYSTEM' S SystemLiteral | 'PUBLIC' S PubidLiteral S SystemLiteral
[76]   NDataDecl         ::= S 'NDATA' S Name
[77]   TextDecl          ::= '<?xml' VersionInfo? EncodingDecl S? '?>'
[78]   extParsedEnt      ::= TextDecl? content - Char* RestrictedChar Char*
[80]   EncodingDecl      ::= S 'encoding' Eq ('"' EncName '"' | "'" EncName "'" )
[81]   EncName           ::= [A-Za-z] ([A-Za-z0-9._] | '-')*
[82]   NotationDecl      ::= '<!NOTATION' S Name S (ExternalID | PublicID) S? '>'
[83]   PublicID          ::= 'PUBLIC' S PubidLiteral
```

Beispiel Compiler



Wiederholung: Ableitung

Sei $\langle V, \Sigma, P, S\rangle$ eine Grammatik. Die 1-Schritt-Ableitungsrelation ist eine binäre Relation $\Rightarrow$ zwischen Wörtern aus $(V \cup \Sigma)^*$, so dass $u \Rightarrow v$ genau dann wenn:

$$u = w_1\, x\, w_2 \text{ und } v = w_1\, y\, w_2 \text{ und es gibt eine Regel } x \to y \in P$$

wobei $w_1, w_2, x, y \in (V \cup \Sigma)^*$ beliebige Wörter sind.

Die Ableitungsrelation $\Rightarrow^*$ ist der reflexive, transitive Abschluss von $\Rightarrow$, das heißt $u \Rightarrow^* v$ genau dann wenn:

$$u = w_1 \Rightarrow w_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow w_{n-1} \Rightarrow w_n = v$$

wobei $n \geq 1$ und $w_1, \ldots, w_n \in (V \cup \Sigma)^*$ beliebige Wörter sind. Insbesondere gilt $u \Rightarrow^* u$ für alle $u \in (V \cup \Sigma)^*$ (Fall $n = 1$).

Anmerkung: Der Begriff „Herleitungsrelation“ ist auch gebräuchlich. Wir verwenden „Ableitung“ und „Herleitung“ synonym.

Anmerkung 2: Manche Autoren schreiben $\vdash$ statt $\Rightarrow$.

Beispiel

Die Grammatik

$$\begin{aligned} S &\to A \mid M \mid V \\ A &\to (S{+}S) \\ M &\to (S{*}S) \\ V &\to \mathtt{x} \mid \mathtt{y} \mid \mathtt{z} \end{aligned}$$

erzeugt zum Beispiel das Wort $(\mathtt{x} * (\mathtt{y} + \mathtt{z}))$ über die Ableitung:

$$\begin{aligned} &S \Rightarrow M \Rightarrow (S{*}S) \Rightarrow (V{*}S) \Rightarrow (\mathtt{x}{*}S) \Rightarrow (\mathtt{x}{*}A) \Rightarrow (\mathtt{x}{*}(S{+}S)) \\ &\Rightarrow (\mathtt{x}{*}(V{+}S)) \Rightarrow (\mathtt{x}{*}(\mathtt{y}{+}S)) \Rightarrow (\mathtt{x}{*}(\mathtt{y}{+}V)) \Rightarrow (\mathtt{x}{*}(\mathtt{y}{+}\mathtt{z})) \end{aligned}$$

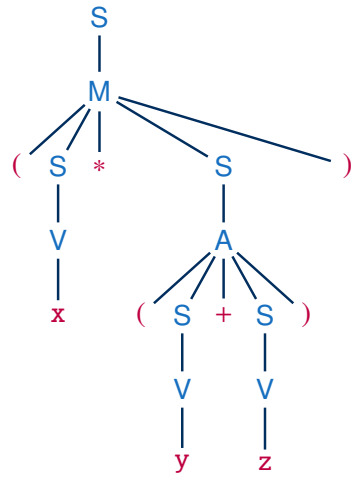
Ableitungen als Bäume

Grammatik:

$$\begin{aligned} S &\to A \mid M \mid V \quad & A &\to (S{+}S) \\ M &\to (S{*}S) \quad & V &\to \mathtt{x} \mid \mathtt{y} \mid \mathtt{z} \end{aligned}$$

Ableitung:

$$\begin{aligned} &S \Rightarrow M \Rightarrow (S{*}S) \Rightarrow (V{*}S) \\ &\Rightarrow (\mathtt{x}{*}S) \Rightarrow (\mathtt{x}{*}A) \\ &\Rightarrow (\mathtt{x}{*}(S{+}S)) \Rightarrow (\mathtt{x}{*}(V{+}S)) \\ &\Rightarrow (\mathtt{x}{*}(\mathtt{y}{+}S)) \Rightarrow (\mathtt{x}{*}(\mathtt{y}{+}V)) \\ &\Rightarrow (\mathtt{x}{*}(\mathtt{y}{+}\mathtt{z})) \end{aligned}$$



Von Ableitung zu Ableitungsbaum

Sei $G = \langle V, \Sigma, P, S \rangle$ eine Grammatik und sei $S = w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow w_n$ eine Ableitung (mit $w_i \in (V \cup \Sigma)^*$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$).

Wir erhalten den entsprechenden Ableitungsbaum wie folgt:

- Der Ableitungsbaum wird initialisiert mit einem einzigen Wurzelknoten S
- Der Baum wird schrittweise konstruiert. Nach i Schritten ergeben die Blätter des Baumes – gelesen von links nach rechts – immer genau w_i.
- Wenn in einem Ableitungsschritt $w_i \Rightarrow w_{i+1}$ die Regel $V \to u$ angewendet wurde, dann erhält der Knoten für V genau $|u|$ Kindknoten, die – von links nach rechts – mit den Symbolen aus u beschriftet werden.

Ableitungsbäume sind auch als Syntaxbäume oder Parsebäume bekannt

Anwendung Ableitungsbaum

Der Ableitungsbaum ist von großer praktischer Bedeutung, da er die „innere Struktur“ eines Wortes einer kontextfreien Sprache repräsentiert

In der Praxis geht es meist nicht darum, zu prüfen, ob ein Wort in einer Sprache liegt, sondern darum, seine syntaktische Struktur zu ermitteln

Beispiele:

- Parsebäume in der Verarbeitung natürlicher Sprache können Aufschluss über die Bedeutung eines Satzes geben
- Syntaxbäume in Programmiersprachen sind die Grundlage zur inhaltlichen Interpretation des Codes
- Ableitungsbäume in Mark-Up-Sprachen wie HTML oder XML sind entscheidend für die Adressierung von Elementen („DOM-Tree“)

Zusammenfassung und Ausblick

Algorithmische Probleme zu Automaten sind Leerheit, Inklusion, Äquivalenz, Universalität, Endlichkeit und das Wortproblem
für einige von ihnen sind bei Verwendung von NFAs nur exponentielle Algorithmen bekannt

Wir kennen viele Charakterisierungen für reguläre Sprachen, die man mit zahlreichen Umformungen in Beziehung setzten kann

Wörter in kontextfreien Sprachen haben eine interessante innere Struktur, die wir durch Ableitungsbäume darstellen können

Offene Fragen:

- Wie kann das Wortproblem bei kontextfreien Grammatiken gelöst werden?
- Haben kontextfreie Sprachen ein Berechnungsmodell?
- Wie sehen nicht-kontextfreie Sprachen aus und wie erkennt man sie?