TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Informatik Institut für Theoretische Informatik, Wissensbasierte Systeme

# Formale Systeme

## 11. Übungsblatt

Wintersemester 2020/21

**Aufgabe zur Selbstkontrolle (diese wird nur auf konkrete Nachfrage in den Übungen besprochen)**

S19) Geben Sie eine Turingmaschine $\mathcal{M}_{abc}$ an, welche die Sprache $L = \{a^i b^i c^i \mid i \geq 0\}$ erkennt.

*Hinweis*: Nutzen Sie die skizzenhafte Beschreibung der Arbeitsweise für eine solche TM aus der Vorlesung. Neben der Darstellung in Diagrammform ist ebenfalls die Darstellung der Übergangsfunktion $\delta$ in Tabellenform möglich. Achten Sie auf die Kommentare in der Tabelle.

### Aufgabe 1

Im Folgenden bezeichne $\mathcal{M}_w$ eine deterministische Turingmaschine mit einem Band und dem Eingabealphabet $\Sigma = \{0, 1, \#\}$, deren Codewort $\mathsf{enc}(\mathcal{M}_w)$ gleich $w$ ist, falls es ein solches Codewort mit $\mathsf{enc}(\mathcal{M}_w) = w$ gibt (vgl. Vorlesung 19, Folie 15). Andernfalls ist $\mathcal{M}_w = \mathcal{M}_\perp$, eine fest gewählte deterministische Turingmaschine mit dem Eingabealphabet $\Sigma = \{0, 1, \#\}$, die für alle Eingabewörter endlos läuft.

Ist die nachfolgende Sprache entscheidbar?

$$L = \big\{ w \in \{0,1,\#\}^* \mid \text{es gibt ein Wort } z \in \{0,1,\#\}^* \text{ mit } |z| \leq |w|^2 \text{, so dass } \mathcal{M}_w \text{ das Eingabewort } z \text{ in höchstens } |z| \text{ Schritten akzeptiert} \big\}$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

### Aufgabe 2

Sei $\mathcal{M}_w$ wie in Aufgabe 1 und

$$t_{\mathcal{M}_w}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Anzahl der Schritte, die } \mathcal{M}_w \text{ bei Eingabe } x \text{ durchführt.}$$

Ist die Sprache $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid t_{\mathcal{M}_w}(w) > 2^{|w|}\}$ entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

**Aufgabe 3**

Geben Sie in den folgenden Aufgaben jeweils eine deterministische Turingmaschine mit einem oder mehreren Bändern an.

(a) Jeweils eine DTM $\mathcal{M}_{ADD}$ bzw. $\mathcal{M}_{MULT}$ für die Additions- bzw. Multiplikationsfunktion

$$\begin{aligned} f_{ADD} &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f_{ADD}(n,m) &= n + m \\ f_{MULT} &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f_{MULT}(n,m) &= n \cdot m \end{aligned}$$

(b) Jeweils eine DTM an für die Funktionen

$$\begin{aligned} f_{fak} &: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f_{fak}(n) &= n! \\ f_{\log} &: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f_{\log}(n) &= \begin{cases} \lfloor \log n \rfloor & \text{falls } n \geq 1 \\ \perp & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

(Zur Erinnerung: $0! = 1$.)

Hinweise: Es genügen informelle Beschreibungen; etwa durch Skizzen, aus denen ersichtlich wird, wie (aus der Vorlesung oder Übung bekannte oder selbst definierte) Turingmaschinen miteinander verknüpft werden. Darüber hinaus können Sie die Zahlenkodierung frei entscheiden.