TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Informatik, Institut für Künstliche Intelligenz, Professur Computational Logic

THEORETISCHE INFORMATIK UND LOGIK

15. Vorlesung: Logisches Schließen und Gleichheit

Hannes Straß

TU Dresden, 2. Juni 2022

Lehrevaluation

10min Zeit zum Ausfüllen

`https://tud.link/ikzv`

Prädikatenlogik als Universalsprache

Die Entwicklung der Logik hat ein zentrales Motiv:
Logik als eine universelle, präzise Sprache.

- Aristoteles (384–322 v.u.Z.): Logik als Grundlage der (philosophischen) Argumentation zwischen vernünftig denkenden Menschen
- Leibniz (1646–1716): Vordenker des automatischen Schließens:

> „. . . falls es zu Unstimmigkeiten käme, dann gäbe es zwischen zwei Philosophen nicht mehr Anlass für Streitigkeiten als zwischen zwei Buchhaltern. Denn es würde genügen, dass beide die Stifte zur Hand nehmen, sich zum Rechenschieber setzen und sagen [···]: Lasst uns rechnen!“

- Hilbert (1862–1942): Programm zur Formalisierung der Mathematik
- Russell (1872–1970): Entwicklung eines logischen Kalküls als Grundlage aller Mathematik

Kernproblem logisches Schließen

Drückt man die Mathematik in logischen Formeln aus, dann wird logisches Schließen zur Kernaufgabe mathematischer Forschung.

Das Problem des prädikatenlogischen Schließens besteht in der folgenden Frage:

Gegeben: Eine endliche Menge prädikatenlogischer Sätze (Theorie) $\mathcal{T}$ und ein Satz F.
Frage: Gilt $\mathcal{T} \models F$, d.h. folgt F aus $\mathcal{T}$?

Dieses Problem ist zu verschiedenen anderen äquivalent:

Satz: Für endliche Theorie $\mathcal{T}$ und einen Satz F sind die folgenden Fragen äquivalent:

- Gilt $\mathcal{T} \models F$?
- Ist $\mathcal{T} \cup \{\neg F\}$ unerfüllbar?
- Ist $(\bigwedge_{G \in \mathcal{T}} G) \to F$ eine Tautologie?

Die Bedeutung von Erfüllbarkeit

Satz: Für endliche Theorie $\mathcal{T}$ und einen Satz F sind die folgenden Fragen äquivalent:

- Gilt $\mathcal{T} \models F$?
- Ist $\mathcal{T} \cup \{\neg F\}$ unerfüllbar?
- Ist $(\bigwedge_{G \in \mathcal{T}} G) \to F$ eine Tautologie?

Daraus folgt: Logisches Schließen kann auf das Überprüfen der (Un-)Erfüllbarkeit einer Formel

$$\bigwedge_{G \in \mathcal{T}} G \land \neg F$$

zurückgeführt werden.

$\rightsquigarrow$ Erfüllbarkeit als zentrale Frage des Schließens.

Gleichheit

Gleichheit in Prädikatenlogik

Gleichheit spielt in vielen Anwendungen eine große Rolle:

Manchmal wird Prädikatenlogik so definiert, dass es ein spezielles Gleichheitsprädikat $\approx$ gibt, welches in der Regel infix geschrieben wird.

Semantik: In allen Interpretationen $\mathcal{I} = \langle \Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$ ist $\approx^{\mathcal{I}} = \{\langle \delta, \delta \rangle \mid \delta \in \Delta^{\mathcal{I}}\}$.

Wir haben bereits ein Beispiel dafür gesehen:

Beispiel: Partielle Ordnungen $\preceq$ sind antisymmetrisch:

$$\forall x, y.((x \preceq y \land y \preceq x) \to x \approx y)$$

Auch erlaubt uns Gleichheit, in Logik(en) zu zählen:

Beispiel: „Es gibt nur einen Rudi Völler.“

$$\forall x, y.(\text{rudiVöller}(x) \land \text{rudiVöller}(y) \to x \approx y)$$

Gleichheit der Interpretation von Konstanten

Die übliche Semantik von Prädikatenlogik erlaubt, dass verschiedene Konstanten gleich interpretiert werden.

Mit Gleichheit kann man das erzwingen oder verbieten:

Beispiel: Seien $\text{rudiVöller}, \text{tanteKäthe}, \text{rudi} \in \mathbf{C}$ Konstanten. Wir können ausdrücken:

$$\text{rudiVöller} \approx \text{tanteKäthe}$$
$$\neg\text{rudiVöller} \approx \text{rudi}$$

Manchmal wird auch $\not\approx$ als spezielles Prädikat eingeführt.
Wir können das aber auch leicht definieren:

$$\forall x, y.(x \not\approx y \leftrightarrow \neg x \approx y)$$

Beispiel: Mit Ungleichheit können wir noch weiter (als bis eins) zählen:
„Es gibt mindestens drei P.“

$$\exists x_1, x_2, x_3.\big(x_1 \not\approx x_2 \land x_1 \not\approx x_3 \land x_2 \not\approx x_3 \land P(x_1) \land P(x_2) \land P(x_3)\big)$$

Ist Ungleichheit wirklich nötig?

Ungleichheit von Konstanten kann man auch leicht ohne $\approx$ ausdrücken:

Beispiel: Wir betrachten zwei neue, einstellige Prädikate $O_{\text{rudiVöller}}$ und O_{rudi}.
Aus der unten angegebenen Theorie $\mathcal{T}$ folgt $\neg$rudiVöller $\approx$ rudi:

$$\mathcal{T} = \{\, O_{\text{rudiVöller}}(\text{rudiVöller}),\ O_{\text{rudi}}(\text{rudi}),\ \forall x.\neg(O_{\text{rudiVöller}}(x) \wedge O_{\text{rudi}}(x))\,\}$$

Idee:

- Die Prädikate $O_{\text{rudiVöller}}$ und O_{rudi} beschreiben zwei Mengen.
- Die Mengen enthalten jeweils mindestens die Elemente, welche durch rudiVöller bzw. rudi bezeichnet werden.
- Die Mengen sind disjunkt (d.h. enthalten keine gemeinsamen Elemente).

$\leadsto$ Erzwingung von Ungleichheit durch Zuweisung unvereinbarer Eigenschaften.

Quiz: Ungleichheit und Folgerungen

- Schlussfolgerung: $\mathcal{T} \models F$ gdw. jede Interpretation $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I} \models \mathcal{T}$ auch $\mathcal{I} \models F$ erfüllt.
- Gleichheit: Infix-Prädikat $\approx$; für jede Interpretation $\mathcal{I}$ gilt $\approx^{\mathcal{I}} = \{\langle\delta,\delta\rangle \mid \delta \in \Delta^{\mathcal{I}}\}$.

Quiz: Welche Schlussfolgerungen gelten? ...

Ist Gleichheit wirklich nötig?

Es stellt sich heraus, dass man die wesentlichen Eigenschaften von $\approx$ logisch beschreiben kann:

Für eine gegebene endliche Menge **R** von relevanten Prädikatensymbolen und ein neues zweistelliges Prädikatensymbol eq definieren wir die folgende Gleichheitstheorie $\mathcal{EQ}_{\mathbf{R}}$:

$$\begin{array}{ll}
\forall x.\text{eq}(x,x) & \text{Reflexivität} \\
\forall x,y.\text{eq}(x,y) \to \text{eq}(y,x) & \text{Symmetrie} \\
\forall x,y,z.(\text{eq}(x,y) \wedge \text{eq}(y,z)) \to \text{eq}(x,z) & \text{Transitivität} \\
\forall x_1,\ldots,x_n,y.((p(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n) \wedge \text{eq}(x_i,y)) & \\
\qquad \to p(x_1,\ldots,x_{i-1},y,x_{i+1},\ldots,x_n)) & \text{Kongruenz}
\end{array}$$

wobei der letzte Satz für alle n-stelligen $p \in \mathbf{R}$ und alle $i \in \{1,\ldots,n\}$ hinzugefügt wird.
($\leadsto$ Insgesamt sind das also nur endlich viele Sätze.)

Gleichheit ist nicht nötig

Für eine beliebige Theorie $\mathcal{T}$ der Prädikatenlogik mit Gleichheit definieren wir $\mathcal{T}_{\text{eq}}$ als die Theorie, die man erhält, indem man $\approx$ in allen Sätzen von $\mathcal{T}$ durch eq ersetzt.

Satz: Sei $\mathcal{T}$ eine Theorie der Prädikatenlogik mit $\approx$ und weiteren Prädikatensymbolen aus der endlichen Menge **R**.

Dann ist $\mathcal{T}$ genau dann in der Prädikatenlogik mit Gleichheit erfüllbar, wenn $\mathcal{T}_{\text{eq}} \cup \mathcal{EQ}_{\mathbf{R}}$ in der Prädikatenlogik ohne Gleichheit erfüllbar ist.

Warum ist das nützlich?

- Logisches Schließen kann auf den Test von Erfüllbarkeit zurückgeführt werden.
- Erfüllbarkeit bleibt erhalten, wenn man „eingebaute" Gleichheit durch eine logische Beschreibung von Gleichheit ersetzt.

$\leadsto$ Schließen wird durch Gleichheit nicht wesentlich komplizierter.

Beweis (1)

Satz: Sei $\mathcal{T}$ eine Theorie der Prädikatenlogik mit $\approx$ und weiteren Prädikatensymbolen aus der endlichen Menge **R**.

Dann ist $\mathcal{T}$ genau dann in der Prädikatenlogik mit Gleichheit erfüllbar, wenn $\mathcal{T}_{\mathsf{eq}} \cup \mathcal{EQ}_{\mathbf{R}}$ in der Prädikatenlogik ohne Gleichheit erfüllbar ist.

Beweis: „$\Rightarrow$“ Nehmen wir an, $\mathcal{T}$ ist in der Prädikatenlogik mit Gleichheit erfüllbar.

- Dann hat $\mathcal{T}$ ein Modell $\mathcal{I} \models \mathcal{T}$, wobei $\approx^{\mathcal{I}} = \{\langle\delta,\delta\rangle \mid \delta \in \Delta^{\mathcal{I}}\}$.
- Wir definieren eine Interpretation $\mathcal{J}$ mit $\Delta^{\mathcal{J}} := \Delta^{\mathcal{I}}$:
  - $c^{\mathcal{J}} := c^{\mathcal{I}}$ für alle Konstanten $c \in \mathbf{C}$;
  - $p^{\mathcal{J}} := p^{\mathcal{I}}$ für alle Prädikate $p \in \mathbf{P}$ mit $p \neq \approx$;
  - $\mathsf{eq}^{\mathcal{J}} := \approx^{\mathcal{I}}$.
- Dann gilt $\mathcal{J} \models \mathcal{T}_{\mathsf{eq}}$ per Definition.
- Zudem gilt $\mathcal{J} \models \mathcal{EQ}_{\mathbf{R}}$, da $\mathsf{eq}^{\mathcal{J}} = \{\langle\delta,\delta\rangle \mid \delta \in \Delta^{\mathcal{J}}\}$.

$\leadsto$ $\mathcal{J} \models \mathcal{T}_{\mathsf{eq}} \cup \mathcal{EQ}_{\mathbf{R}}$, das heißt $\mathcal{T}_{\mathsf{eq}} \cup \mathcal{EQ}_{\mathbf{R}}$ ist erfüllbar.

Beweis (2)

Satz: Sei $\mathcal{T}$ eine Theorie der Prädikatenlogik mit $\approx$ und weiteren Prädikatensymbolen aus der endlichen Menge **R**.

Dann ist $\mathcal{T}$ genau dann in der Prädikatenlogik mit Gleichheit erfüllbar wenn $\mathcal{T}_{\mathsf{eq}} \cup \mathcal{EQ}_{\mathbf{R}}$ in der Prädikatenlogik ohne Gleichheit erfüllbar ist.

Beweis: „$\Leftarrow$“ Nehmen wir an, $\mathcal{T}_{\mathsf{eq}} \cup \mathcal{EQ}_{\mathbf{R}}$ ist erfüllbar.

- Dann gibt es ein Modell $\mathcal{J} \models \mathcal{T}_{\mathsf{eq}} \cup \mathcal{EQ}_{\mathbf{R}}$.
- Aus $\mathcal{J} \models \mathcal{EQ}_{\mathbf{R}}$ folgt, dass $\mathsf{eq}^{\mathcal{J}}$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\Delta^{\mathcal{J}}$ ist: Äquivalenzklassen schreiben wir als $[\delta] = \left\{\epsilon \,\middle|\, \langle\delta,\epsilon\rangle \in \mathsf{eq}^{\mathcal{J}}\right\}$.
- Faktorisierung von $\mathcal{J}$ mit $\mathsf{eq}^{\mathcal{J}}$ erzeugt eine Interpretation $\mathcal{I}$:

$$\begin{aligned}
\Delta^{\mathcal{I}} &:= \left\{[\delta] \,\middle|\, \delta \in \Delta^{\mathcal{J}}\right\} \\
c^{\mathcal{I}} &:= \left[c^{\mathcal{J}}\right] \text{ für alle Konstanten } c \in \mathbf{C}. \\
p^{\mathcal{I}} &:= \left\{\langle[\delta_1],\ldots,[\delta_n]\rangle \,\middle|\, \langle\delta_1,\ldots,\delta_n\rangle \in p^{\mathcal{J}}\right\} \text{ für alle } p \in \mathbf{P} \text{ mit } p \neq \approx.
\end{aligned}$$

Beweis (3)

Beweis: (Forts.) Wir haben $\mathcal{I}$ konstruiert, indem wir alle Domänenelemente von $\mathcal{J}$ gleichsetzen, welche in der Relation $\mathsf{eq}^{\mathcal{J}}$ stehen.

Wir wollen zeigen, dass $\mathcal{I} \models \mathcal{T}$ in der Prädikatenlogik mit Gleichheit gilt.[1]

Wir zeigen eine allgemeinere Behauptung:[2]

- Für eine Zuweisung $\mathcal{Z}$ für $\mathcal{J}$ definieren wir eine Zuweisung $\mathcal{Z}'$ für $\mathcal{I}$ wie folgt: $\mathcal{Z}'(x) := [\mathcal{Z}(x)]$ für alle $x \in \mathbf{V}$.
- Wir behaupten: Für jede Formel F der Prädikatenlogik mit Gleichheit und jede Zuweisung $\mathcal{Z}$ für $\mathcal{J}$ gilt:

$$\mathcal{J},\mathcal{Z} \models F_{\mathsf{eq}} \text{ genau dann wenn } \mathcal{I},\mathcal{Z}' \models F$$

- Daraus folgt wie gewünscht $\mathcal{I} \models \mathcal{T}$, weil $\mathcal{T}$ eine Theorie ist und daher nur Sätze enthält (die Zuweisung $\mathcal{Z}$ ist damit irrelevant) und per Annahme $\mathcal{J} \models \mathcal{T}_{\mathsf{eq}}$ gilt.

[1] Verständnischeck: Klingt das plausibel? Sogar offensichtlich? Gut. Warum genau?

[2] Mathematische Taktik: Scheint uns ein Beweis zu schwer, dann beweisen wir eine stärkere Aussage.

Beweis (4)

Beweis: (Forts.) Wir behaupten: Für jede Formel F der Prädikatenlogik mit Gleichheit und jede Zuweisung $\mathcal{Z}$ für $\mathcal{J}$ gilt:

$$\mathcal{J},\mathcal{Z} \models F_{\mathsf{eq}} \text{ genau dann wenn } \mathcal{I},\mathcal{Z}' \models F$$

Wie lässt sich so eine Behauptung beweisen?

$\leadsto$ Per Induktion über den Aufbau von Formeln.

Induktionsanfang: Für atomare Formeln $F = p(t_1,\ldots,t_n)$ mit $p \neq \approx$ gilt die Behauptung, weil für alle $\delta_1,\ldots,\delta_n \in \Delta^{\mathcal{J}}$ gilt:

$$\langle\delta_1,\ldots,\delta_n\rangle \in p^{\mathcal{J}} \text{ genau dann wenn } \langle[\delta_1],\ldots,[\delta_n]\rangle \in p^{\mathcal{I}}$$

$\Rightarrow$ folgt direkt aus der Definition von $p^{\mathcal{I}}$.
$\Leftarrow$ folgt, weil $\mathcal{J} \models \mathcal{EQ}_{\mathbf{R}}$ gilt und daher $\mathsf{eq}^{\mathcal{J}}$ eine Kongruenzrelation ist.

Für atomare Formeln $F = (t_1 \approx t_2)$ gilt die Behauptung ebenfalls, da für alle $\delta,\epsilon \in \Delta^{\mathcal{J}}$ gilt:

$$[\delta] = [\epsilon] \text{ genau dann wenn } \langle\delta,\epsilon\rangle \in \mathsf{eq}^{\mathcal{J}}$$

Genauer: $\mathcal{I},\mathcal{Z}' \models t_1 \approx t_2$ gdw. $t_1^{\mathcal{I},\mathcal{Z}'} = t_2^{\mathcal{I},\mathcal{Z}'}$ gdw. $\left[t_1^{\mathcal{J},\mathcal{Z}}\right] = \left[t_2^{\mathcal{J},\mathcal{Z}}\right]$ gdw. $\left\langle t_1^{\mathcal{J},\mathcal{Z}}, t_2^{\mathcal{J},\mathcal{Z}}\right\rangle \in \mathsf{eq}^{\mathcal{J}}$ gdw. $\mathcal{J},\mathcal{Z} \models \mathsf{eq}(t_1,t_2)$.

Beweis (5)

Beweis: (Forts.) Wir behaupten: Für jede Formel F der Prädikatenlogik mit Gleichheit und jede Zuweisung $\mathcal{Z}$ für $\mathcal{J}$ gilt:

$$\mathcal{J}, \mathcal{Z} \models F_{\text{eq}} \text{ genau dann wenn } \mathcal{I}, \mathcal{Z}' \models F$$

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gilt für Formeln G und H (IV).

Induktionsschritte:

- Falls $F = (G \wedge H)$, dann berechnen wir:
  $\mathcal{J}, \mathcal{Z} \models (G \wedge H)_{\text{eq}}$ gdw. $\mathcal{J}, \mathcal{Z} \models G_{\text{eq}} \wedge H_{\text{eq}}$ gdw. $\mathcal{J}, \mathcal{Z} \models G_{\text{eq}}$ und $\mathcal{J}, \mathcal{Z} \models H_{\text{eq}}$ gdw.[IA]
  $\mathcal{I}, \mathcal{Z}' \models G$ und $\mathcal{I}, \mathcal{Z}' \models H$ gdw. $\mathcal{I}, \mathcal{Z}' \models (G \wedge H)$.
- Die Fälle $F = \neg G$, $F = (G \vee H)$, $F = (G \to H)$ und $F = (G \leftrightarrow H)$ sind analog.
- Falls $F = \exists x.G$, dann: $\mathcal{J}, \mathcal{Z} \models (\exists x.G)_{\text{eq}}$ gdw. $\mathcal{J}, \mathcal{Z}[x \mapsto \delta] \models G_{\text{eq}}$ für ein $\delta \in \Delta^{\mathcal{J}}$
  gdw.[IA] $\mathcal{I}, \mathcal{Z}'[x \mapsto [\delta]] \models G$ für ein $\delta \in \Delta^{\mathcal{J}}$
  gdw. $\mathcal{I}, \mathcal{Z}'[x \mapsto [\delta]] \models G$ für ein $[\delta] \in \Delta^{\mathcal{I}}$ gdw. $\mathcal{I}, \mathcal{Z}' \models \exists x.G$.
- Der Fall $F = \forall x.G$ funktioniert analog. $\square$

Strukturelle Induktion

Die gezeigte Variante von Induktion heißt strukturelle Induktion.

- Vollständige Induktion auf natürlichen Zahlen: Ist E eine Eigenschaft, so dass gilt: (1) die Zahl 0 hat E und (2) eine natürliche Zahl $n > 0$ hat E falls ihr Vorgänger $n - 1$ E hat; dann haben alle natürlichen Zahlen die Eigenschaft E.
- Strukturelle Induktion auf Formeln: Ist E eine Eigenschaft, so dass gilt: (1) atomare Formeln haben E und (2) eine nicht-atomare Formel F hat E falls ihre maximalen echten Teilformeln E haben; dann haben alle Formeln die Eigenschaft E.

Allgemein kann man Induktion über jede induktiv definierte syntaktische Struktur durchführen (Formeln, Terme, Programme, ...).

Beispiel: Induktion auf der Insel der Wahrheitssager und Lügner. Ein Einwohner verkündet: „Was ich jetzt sage, das habe ich schon einmal gesagt.“ Welchen Typ hat er?

Zusammenfassung und Ausblick

Logisches Schließen ist ein Kernproblem der Prädikatenlogik; es entspricht verschiedenen konkreten Fragen (Folgerung, Unerfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit).

Logisches Schließen über logischen Aussagen mit Gleichheit kann auf logisches Schließen ohne Gleichheit reduziert werden.

Strukturelle Induktion ist eine wichtige Beweismethode, um mit wenigen (endlich vielen) Schritten zu zeigen, dass eine Eigenschaft für alle (unendlich vielen) Formeln gilt.

Was erwartet uns als nächstes?

- Unentscheidbarkeit des logischen Schließens
- Ein konkretes Verfahren zum logischen Schließen
- Gödels Unvollständigkeitssätze

Bildrechte

Folie 3: (von oben)

- Aristoteles-Büste, römische Kopie, nach einer Skulptur des Bildhauers Lysippos, gemeinfrei
- Gemälde von Johann Friedrich Wentzel d. Ä. (Ausschnitt), um 1700, gemeinfrei
- Fotografie von 1912, gemeinfrei
- Fotografie, um 1924, gemeinfrei