

THEORETISCHE INFORMATIK UND LOGIK

20. Vorlesung: Resolution (2)

Markus Krötzsch
 Lehrstuhl Wissensbasierte Systeme

TU Dresden, 29. Juni 2018



Jacques Herbrand

12.2.1908 – 27.7.1931

Evaluation

Vollständigkeit der Resolution

Resolutionsregel:

$$\frac{\{A_1, \dots, A_n, L_1, \dots, L_k\} \quad \{\neg A'_1, \dots, \neg A'_m, L'_1, \dots, L'_\ell\}}{\{L_1\sigma, \dots, L_k\sigma, L'_1\sigma, \dots, L'_\ell\sigma\}}$$

falls σ allgemeinsten Unifikator von $\{A_1, \dots, A_n, A'_1, \dots, A'_m\}$ ist

Algorithmus (Skizze):

- (1) Bilde Klauselform
- (2) Bilde systematisch Resolventen durch Resolution von Varianten bereits abgeleiteter Klauseln
- (3) Wiederhole (2), bis entweder \perp erzeugt wird („unerfüllbar“) oder keine neuen Klauseln mehr entstehen¹

¹Dieser Fall ist eher ungewöhnlich: Meist entstehen bei erfüllbaren Theorien immer mehr neue Klauseln ohne dass das Verfahren terminiert.

Vollständigkeit und Korrektheit

Resolutionssatz: Sei F eine prädikatenlogische Formel und \mathcal{K}_i ($i \geq 0$) die vom Resolutionsalgorithmus ermittelten Klauselmengen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- F ist unerfüllbar
- Es gibt ein $\ell \geq 0$ mit $\perp \in \mathcal{K}_\ell$
- Korrektheit hatten wir bereits gezeigt
- Vollständigkeit steht noch aus

Syntax vs. Semantik

Bei Herbrandinterpretationen kann man semantische Elemente (wie sie in Zuweisungen vorkommen) durch syntaktische Elemente (wie sie in Substitutionen vorkommen) ausdrücken:

Lemma: Für jede Herbrandinterpretation \mathcal{I} , jede Zuweisung \mathcal{Z} für \mathcal{I} , jeden Term $t \in \Delta^{\mathcal{I}}$ und jede Formel F gilt:

$$\mathcal{I}, \mathcal{Z}\{x \mapsto t\} \models F \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{I}, \mathcal{Z} \models F\{x \mapsto t\}$$

(ohne Beweis; einfach)

Anmerkung: Man kann ein entsprechendes Resultat auch für Nicht-Herbrand-Interpretationen zeigen. Dann muss man einfach den Term auf der linken Seite durch $t^{\mathcal{I}, \mathcal{Z}}$ ersetzen.



Jacques Herbrand

12.2.1908 – 27.7.1931

Erfüllbar + Skolem = Erfüllbarkeit bei Herbrand

Satz: Ein Satz F in Skolemform ist genau dann erfüllbar, wenn F ein Herbrandmodell hat.

Beweis: (\Leftarrow) ist klar, da Herbrandmodelle auch Modelle sind.

(\Rightarrow) Sei $\mathcal{I} \models F$ ein Modell für F . Wir definieren eine Herbrandinterpretation \mathcal{J} indem wir festlegen:

- $p^{\mathcal{J}} = \{\langle t_1, \dots, t_n \rangle \mid \langle t_1^{\mathcal{I}}, \dots, t_n^{\mathcal{I}} \rangle \in p^{\mathcal{I}}\}$
Anm.: t_i sind variabelfrei, daher ist $t_i^{\mathcal{I}}$ wohldefiniert

Behauptung: \mathcal{J} ist ein Herbrandmodell von F

Beweis (Fortsetzung)

Behauptung: \mathcal{I} ist ein Herbrandmodell von F

F hat die Form $\forall x_1, \dots, x_n. G$, wobei G quantorenfrei ist.

- Aus $\mathcal{I} \models F$ folgt also $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models G$ für jede Zuweisung \mathcal{Z} für \mathcal{I}
- Speziell gilt also für alle $t_1, \dots, t_n \in \Delta_F$: $\mathcal{I}, \{x_1 \mapsto t_1^{\mathcal{I}}, \dots, x_n \mapsto t_n^{\mathcal{I}}\} \models G$
- Daraus folgt: $\mathcal{I} \models G\{x_1 \mapsto t_1, \dots, x_n \mapsto t_n\}$ (analog zu Lemma)
- Daraus folgt: $\mathcal{J} \models G\{x_1 \mapsto t_1, \dots, x_n \mapsto t_n\}$
(Für Atome G direkt aus Definition; die Aussage kann leicht auf größere Boolesche Verknüpfungen von Atomen verallgemeinert werden – formal durch strukturelle Induktion)
- Es folgt: $\mathcal{J}, \{x_1 \mapsto t_1, \dots, x_n \mapsto t_n\} \models G$ (Lemma)

Der Schluss gilt für alle $t_1, \dots, t_n \in \Delta_F$, d.h. $\mathcal{J} \models F$. □

Prädikatenlogisches Schließen mit Aussagenlogik

Herbrand-Expansionen

Die **Herbrand-Expansion** $HE(F)$ einer Formel $F = \forall x_1, \dots, x_n. G$ in Skolemform ist die Menge:

$$HE(F) := \{G\{x_1 \mapsto t_1, \dots, x_n \mapsto t_n\} \mid t_1, \dots, t_n \in \Delta_F\}$$

$HE(F)$ ist also die (möglicherweise unendliche) Menge von variablenfreien Sätzen, die in Herbrandmodellen von F gelten müssten.

Quantorenfreie Sätze = aussagenlogische Formeln:

- $HE(F)$ enthält Formeln ohne Variablen, d.h. Boolesche Kombinationen geschlossener Atome
- Geschlossene Atome können unabhängig voneinander wahr oder falsch sein, egal wie ihre genaue Struktur aussieht
- Wir können sie also als „ungewöhnlich benannte“ aussagenlogische Atome auffassen und die gesamte Formel aussagenlogisch interpretieren

$\rightsquigarrow HE(F)$ als aussagenlogische Theorie

Gödel, Herbrand, Skolem

Satz von Gödel, Herbrand & Skolem: Eine Formel F in Skolemform ist genau dann erfüllbar, wenn $HE(F)$ aussagenlogisch erfüllbar ist.

Beweis: Wir zeigen, dass $F = \forall x_1, \dots, x_n. G$ genau dann ein Herbrandmodell hat, wenn $HE(F)$ aussagenlogisch erfüllbar ist:

- \mathcal{I} ist ein Herbrandmodell von F
- gdw. $\mathcal{I}, \{x_1 \mapsto t_1, \dots, x_n \mapsto t_n\} \models G$ für alle $t_1, \dots, t_n \in \Delta_F$
- gdw. $\mathcal{I} \models G\{x_1 \mapsto t_1, \dots, x_n \mapsto t_n\}$ für alle $t_1, \dots, t_n \in \Delta_F$ (Lemma)
- gdw. für alle $H \in HE(F)$ gilt $\mathcal{I} \models H$
- gdw. \mathcal{I} als aussagenlogisches Modell für $HE(F)$ angesehen werden kann. □

Satz von Herbrand

Als Korollar der gezeigten Ergebnisse erhalten wir ein wichtiges Resultat:

Satz: Eine Formel F in Skolemform ist genau dann unerfüllbar, wenn eine endliche Teilmenge von $HE(F)$ aussagenlogisch unerfüllbar ist.

Beweis: Das Kontrapositiv des Satzes von Gödel, Herbrand & Skolem besagt:

Eine Formel F in Skolemform ist genau dann unerfüllbar, wenn $HE(F)$ aussagenlogisch unerfüllbar ist.

Der Satz folgt nun, weil jede unerfüllbare aussagenlogische Formelmengung eine endliche Teilmenge hat, die unerfüllbar ist: **Kompaktheit der Aussagenlogik, ohne Beweis**

Das Ergebnis kann aus der Vollständigkeit der Verallgemeinerung aussagenlogischer Resolution auf unendliche Modelle gefolgert werden (siehe Formale Systeme, WS 2017/2018, Vorlesung 23): wenn die leere Klausel endlich abgeleitet werden kann, dann nutzt man dazu nur endlich viele Klauseln der Eingabe; wenn die leere Klausel nicht endlich abgeleitet werden kann, dann erhält man aus der unendlichen Menge aller möglichen Ableitungen ein Modell, analog zum endlichen Fall.

□

Prädikatenlogik semi-entscheiden

Das Ergebnis Herbrands ermöglicht bereits einen naiven Algorithmus zur Semi-Entscheidung von Unerfüllbarkeit in der Prädikatenlogik:

Gegeben: Eine Formel F

- Wandle F in Skolemform F' um
- Definiere eine Reihenfolge der Formeln in $HE(F')$: F_1, F_2, F_3, \dots
- Für alle $i \geq 1$:
 - Prüfe ob die endliche Menge $\{F_1, \dots, F_i\}$ aussagenlogisch unerfüllbar ist
 - Falls ja, dann gib „unerfüllbar“ aus; andernfalls fahre fort

Offenbar ist das **kein praktischer Algorithmus**, aber er zeigt Semi-Entscheidbarkeit

Vollständigkeit der Resolution

Ansatz

Herbrands Satz liefert uns auch eine Strategie zum Beweis der Vollständigkeit des Resolutionsalgorithmus

Wir wissen bereits:

- Unerfüllbarkeit einer Klauselmengung zeigt sich in der Unerfüllbarkeit ihrer Herbrand-Expansion
- Die Unerfüllbarkeit der Herbrand-Expansion kann man mit aussagenlogischer Resolution beweisen
- Prädikatenlogische Resolution verallgemeinert aussagenlogische Resolution indem wir direkt mit Klauseln arbeiten, die noch Variablen enthalten

Frage: Kann man alle Schlüsse, die man auf expandierten Formeln aussagenlogisch erzeugen kann, auch direkt prädikatenlogisch (mit Variablen) erhalten?

Lifting-Lemma

Wir zeigen: Ja, jeder aussagenlogische Schluss (auf der Expansion) kann auf einen prädikatenlogischen Schluss (auf den Klauseln mit Variablen) „angehoben“ werden.

Satz (Lifting-Lemma): Seien K_1 und K_2 prädikatenlogische Klauseln mit Grundinstanzen $K'_1 = K_1\sigma$ und $K'_2 = K_2\sigma$.¹

Wenn R' eine (aussagenlogische) Resolvente von K'_1 und K'_2 ist, dann gibt es eine prädikatenlogische Resolvente R , welche R' als Grundinstanz hat.

¹ Die Verwendung der selben Substitution für K'_1 und K'_2 ist keine Einschränkung, da wir durch Variantenbildung sicherstellen können, dass K_1 und K_2 keine Variablen gemein haben.

Vollständigkeit der Resolution (1)

Resolutionssatz: Sei F eine prädikatenlogische Formel und \mathcal{K}_i ($i \geq 0$) die vom Resolutionsalgorithmus ermittelten Klauselmengen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- F ist unerfüllbar
- Es gibt ein $\ell \geq 0$ mit $\perp \in \mathcal{K}_\ell$

Beweis (Vollständigkeit): Sei F unerfüllbar

- Dann ist $HE(F)$ unerfüllbar
- Dann gibt es eine (endliche) aussagenlogische Resolutionsableitung von \perp aus $HE(F)$
- Die Ableitung erzeugt eine endliche Folge von Klauseln: $K'_1, K'_2, \dots, K'_{m-1}, K'_m = \perp$
- **Behauptung:** Jede Klausel K'_i ist Grundinstanz einer Klausel K_i die in \mathcal{K}_ℓ vorkommt für ein $\ell \geq 0$.
- Für $i = m$ folgt daraus der Satz, denn $K'_m = \perp$ kann nur Grundinstanz von \perp sein, d.h. $\perp \in \mathcal{K}_\ell$ für ein $\ell \geq 0$.

Lifting-Lemma: Beweis

Satz (Lifting-Lemma): Seien K_1 und K_2 prädikatenlogische Klauseln mit Grundinstanzen $K'_1 = K_1\sigma$ und $K'_2 = K_2\sigma$.

Wenn R' eine (aussagenlogische) Resolvente von K'_1 und K'_2 ist, dann gibt es eine prädikatenlogische Resolvente R , welche R' als Grundinstanz hat.

Beweis: Sei $A' \in K'_1$ das (geschlossene) Atom, über das resolviert wurde, d.h. $\neg A' \in K'_2$.

Sei $\mathcal{A}_1 := \{A \mid A \in K_1, A\sigma = A'\}$ und $\mathcal{A}_2 := \{A \mid \neg A \in K_2, A\sigma = A'\}$.

Dann ist σ ein Unifikator für $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$.

Also hat $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ einen allgemeinsten Unifikator θ .

Sei R die Resolvente von K_1 und K_2 bzgl. θ .

Dann enthalten R' und R Instanzen der gleichen Literale, d.h. sie sind von der Form

$R' = \{L_1\sigma, \dots, L_n\sigma\}$ und $R = \{L_1\theta, \dots, L_n\theta\}$

Da θ allgemeinsten Unifikator ist gibt es λ mit $\sigma = \theta \circ \lambda$ und es gilt:

$R\lambda = \{L_1\theta\lambda, \dots, L_n\theta\lambda\} = \{L_1\sigma, \dots, L_n\sigma\} = R'$ □

Vollständigkeit der Resolution (2)

Beweis (Vollständigkeit): Behauptung: Jede Klausel K'_i ist Grundinstanz einer Klausel K_i die in \mathcal{K}_ℓ vorkommt für ein $\ell \geq 0$.

Aussage klar für $K'_i \in HE(F)$: in diesem Fall ist K'_i Grundinstanz einer Klausel K_i in der Klauselform von F und in \mathcal{K}_0

Restlicher Beweis durch Induktion über i :

- Induktionsannahme: Die Aussage gilt für alle $j < i$
- K'_i ist Resolvente zweier Klauseln K'_a und K'_b mit $a, b < i$
- Laut Hypothese sind K'_a und K'_b also Instanzen von Klauseln K_a und K_b in einer Menge \mathcal{K}_ℓ
- Laut Lifting-Lemma ist demnach K'_i ebenfalls die Instanz einer Klausel K_i , die durch Resolution aus K_a und K_b entsteht
- Diese Resolvente K_i ist also ebenfalls in einer Menge der Form \mathcal{K}_ℓ □

Kompaktheit

Die Existenz von vollständigen und korrekten logischen Schließverfahren wie Resolution ist eng verwandt mit einer grundsätzlichen Eigenschaft der Prädikatenlogik:

Satz (Endlichkeitssatz, Kompaktheitssatz): Falls eine unendliche Menge prädikatenlogischer Sätze \mathcal{T} eine logische Konsequenz F hat, so ist F auch Konsequenz einer endlichen Teilmenge von \mathcal{T} .

Beweis: Die gegebene logische Konsequenz ist gleichbedeutend damit, dass $\mathcal{T} \cup \{\neg F\}$ unerfüllbar ist.

Laut Resolutionssatz (Vollständigkeit) kann die Unerfüllbarkeit von $\mathcal{T} \cup \{\neg F\}$ nach endlich vielen Schritten durch Ableitung der leeren Klausel nachgewiesen werden.

Dabei können nur endlich viele Klauseln aus der Klauselform von $\mathcal{T} \cup \{\neg F\}$ verwendet worden sein. Laut Resolutionssatz (Korrektheit) folgt die Konsequenz also bereits aus einer endlichen Teilmenge von \mathcal{T} . \square

Bildrechte

Folie 2, 6: Fotografie von Natasha Artin Brunswick, 1931, CC-By 3.0

Zusammenfassung und Ausblick

Die prädikatenlogische Resolution ist ein vollständiges und korrektes Verfahren für die Unerfüllbarkeit logischer Formeln

In gewissem Sinne ist Prädikatenlogik eine Kurzschreibweise für möglicherweise unendliche aussagenlogische Theorien

Was erwartet uns als nächstes?

- Endliche Modelle und Datenbanken
- Datalog
- Gödel