Formale Systeme – Repetitorium 2 (S13–S21)

Sascha Klüppelholz

Algebraische und logische Grundlagen der Informatik

Institut für Theoretische Informatik

25.01.2018

S13 - Maximaler Typ von Grammatiken und Sprachen

Gegeben sind die Grammatiken G_1 und G_2:

$G_1 = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, T\}, \Sigma = \{a, b\}$ und

$P = \{S \rightarrow aT,\ S \rightarrow \varepsilon, T \rightarrow Sb\}$

$G_2 = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B\}, \Sigma = \{a, b\}$ und

$P = \{S \rightarrow A,\ S \rightarrow \varepsilon,\ A \rightarrow ab,\ A \rightarrow aBb,\ aB \rightarrow aaBb,\ aB \rightarrow a\}$

S13 - Maximaler Typ von Grammatiken und Sprachen

Gegeben sind die Grammatiken G_1 und G_2:

$G_1 = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, T\}, \Sigma = \{a, b\}$ und
$P = \{S \to aT,\ S \to \varepsilon, T \to Sb\}$

$G_2 = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B\}, \Sigma = \{a, b\}$ und
$P = \{S \to A,\ S \to \varepsilon,\ A \to ab,\ A \to aBb,\ aB \to aaBb,\ aB \to a\}$

Geben Sie für jede Grammatik $G \in \{G_1, G_2\}$ jeweils

a) das maximale i an, so dass G eine Typ-i Grammatik ist und

b) das maximale j an, so dass $L(G)$ eine Typ-j Sprache ist.

Begründen Sie Ihre Antwort.

S13 - Maximaler Typ von Grammatiken und Sprachen

Gegeben sind die Grammatiken G_1 und G_2:

$G_1 = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, T\}, \Sigma = \{a, b\}$ und

$P = \{S \to aT,\ S \to \varepsilon, T \to Sb\}$

$G_2 = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B\}, \Sigma = \{a, b\}$ und

$P = \{S \to A,\ S \to \varepsilon,\ A \to ab,\ A \to aBb,\ aB \to aaBb,\ aB \to a\}$

S13 - Maximaler Typ von Grammatiken und Sprachen

Gegeben sind die Grammatiken G_1 und G_2:

$G_1 = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, T\}, \Sigma = \{a, b\}$ und

$P = \{S \to aT,\ S \to \varepsilon, T \to Sb\}$

$G_2 = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B\}, \Sigma = \{a, b\}$ und

$P = \{S \to A,\ S \to \varepsilon,\ A \to ab,\ A \to aBb,\ aB \to aaBb,\ aB \to a\}$

a) G_1 ist nicht vom Typ 3 (rechts- und linksbündige Regeln).
   G_1 ist vom Typ 2 (alle Regeln der Form $A \to v$).

S13 - Maximaler Typ von Grammatiken und Sprachen

Gegeben sind die Grammatiken G_1 und G_2:

$G_1 = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, T\}, \Sigma = \{a, b\}$ und

$P = \{S \to aT,\ S \to \varepsilon, T \to Sb\}$

$G_2 = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B\}, \Sigma = \{a, b\}$ und

$P = \{S \to A,\ S \to \varepsilon,\ A \to ab,\ A \to aBb,\ aB \to aaBb,\ aB \to a\}$

a) G_1 ist nicht vom Typ 3 (rechts- und linksbündige Regeln).
G_1 ist vom Typ 2 (alle Regeln der Form $A \to v$).

G_2 ist nicht vom Typ 1 (nicht alle Regeln $w \to v$ erfüllen $|w| \leqslant |v|$).
G_2 ist aber vom Typ 0 (wohldefinierte Grammatik).

S13 - Maximaler Typ von Grammatiken und Sprachen

Gegeben sind die Grammatiken G_1 und G_2:

$G_1 = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, T\}, \Sigma = \{a, b\}$ und

$P = \{S \to aT,\ S \to \varepsilon, T \to Sb\}$

$G_2 = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B\}, \Sigma = \{a, b\}$ und

$P = \{S \to A,\ S \to \varepsilon,\ A \to ab,\ A \to aBb,\ aB \to aaBb,\ aB \to a\}$

a) G_1 ist nicht vom Typ 3 (rechts- und linksbündige Regeln).
G_1 ist vom Typ 2 (alle Regeln der Form $A \to v$).

G_2 ist nicht vom Typ 1 (nicht alle Regeln $w \to v$ erfüllen $|w| \leqslant |v|$).
G_2 ist aber vom Typ 0 (wohldefinierte Grammatik).

b) $L(G_1) = L(G_2) = \{a^n b^n \mid n \geqslant 0\}$ ist das bekannteste Beispiel einer kontextsensitiven Sprache. Somit sind beides Typ 2 Sprache.

S14 - Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

Um mithilfe des Pumping-Lemmas zu zeigen, dass eine Sprache L nicht regulär ist, zeigt man, dass für sie die Aussage des Pumping-Lemmas nicht gilt. Zeigen Sie, dass die Sprache $L = \{a^i b a^i b \mid i \geqslant 1\}$ nicht regulär ist.

S14 - Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

Um mithilfe des Pumping-Lemmas zu zeigen, dass eine Sprache L nicht regulär ist, zeigt man, dass für sie die Aussage des Pumping-Lemmas nicht gilt. Zeigen Sie, dass die Sprache $L = \{a^i b a^i b \mid i \geqslant 1\}$ nicht regulär ist.

Annahme: L erfüllt das Pumping-Lemma.

S14 - Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

Um mithilfe des Pumping-Lemmas zu zeigen, dass eine Sprache L nicht regulär ist, zeigt man, dass für sie die Aussage des Pumping-Lemmas nicht gilt. Zeigen Sie, dass die Sprache $L = \{a^i b a^i b \mid i \geqslant 1\}$ nicht regulär ist.

Annahme: L erfüllt das Pumping-Lemma. D.h. es gibt $n \geqslant 0$, so dass für jedes $z \in L$ mit $|z| \geqslant n$ eine Aufteilung $z = uvw$ existiert mit:

(1) $|v| \geqslant 1$ (2) $|uv| \leqslant n$ (3) $uv^k w \in L$ für jedes $k \geqslant 0$.

S14 - Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

Um mithilfe des Pumping-Lemmas zu zeigen, dass eine Sprache L nicht regulär ist, zeigt man, dass für sie die Aussage des Pumping-Lemmas nicht gilt. Zeigen Sie, dass die Sprache $L = \{a^i b a^i b \mid i \geqslant 1\}$ nicht regulär ist.

Annahme: L erfüllt das Pumping-Lemma. D.h. es gibt $n \geqslant 0$, so dass für jedes $z \in L$ mit $|z| \geqslant n$ eine Aufteilung $z = uvw$ existiert mit:

(1) $|v| \geqslant 1$ (2) $|uv| \leqslant n$ (3) $uv^k w \in L$ für jedes $k \geqslant 0$.

Für $z = a^n b a^n b$ dann können wir zeigen:

S14 - Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

Um mithilfe des Pumping-Lemmas zu zeigen, dass eine Sprache L nicht regulär ist, zeigt man, dass für sie die Aussage des Pumping-Lemmas nicht gilt. Zeigen Sie, dass die Sprache $L = \{a^i b a^i b \mid i \geqslant 1\}$ nicht regulär ist.

Annahme: L erfüllt das Pumping-Lemma. D.h. es gibt $n \geqslant 0$, so dass für jedes $z \in L$ mit $|z| \geqslant n$ eine Aufteilung $z = uvw$ existiert mit:

(1) $|v| \geqslant 1$ (2) $|uv| \leqslant n$ (3) $uv^k w \in L$ für jedes $k \geqslant 0$.

Für $z = a^n b a^n b$ dann können wir zeigen:

$uv = a^j$ für $0 \leqslant j \leqslant n$ (wegen (2))

S14 - Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

Um mithilfe des Pumping-Lemmas zu zeigen, dass eine Sprache L nicht regulär ist, zeigt man, dass für sie die Aussage des Pumping-Lemmas nicht gilt. Zeigen Sie, dass die Sprache $L = \{a^i b a^i b \mid i \geqslant 1\}$ nicht regulär ist.

Annahme: L erfüllt das Pumping-Lemma. D.h. es gibt $n \geqslant 0$, so dass für jedes $z \in L$ mit $|z| \geqslant n$ eine Aufteilung $z = uvw$ existiert mit:

(1) $|v| \geqslant 1$ (2) $|uv| \leqslant n$ (3) $uv^k w \in L$ für jedes $k \geqslant 0$.

Für $z = a^n b a^n b$ dann können wir zeigen:

$uv = a^j$ für $0 \leqslant j \leqslant n$ (wegen (2)) und $v = a^q$ mit $1 \leqslant q \leqslant j$ (wegen (1))

S14 - Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

Um mithilfe des Pumping-Lemmas zu zeigen, dass eine Sprache L nicht regulär ist, zeigt man, dass für sie die Aussage des Pumping-Lemmas nicht gilt. Zeigen Sie, dass die Sprache $L = \{a^i b a^i b \mid i \geqslant 1\}$ nicht regulär ist.

Annahme: L erfüllt das Pumping-Lemma. D.h. es gibt $n \geqslant 0$, so dass für jedes $z \in L$ mit $|z| \geqslant n$ eine Aufteilung $z = uvw$ existiert mit:

(1) $|v| \geqslant 1$ (2) $|uv| \leqslant n$ (3) $uv^k w \in L$ für jedes $k \geqslant 0$.

Für $z = a^n b a^n b$ dann können wir zeigen:

$uv = a^j$ für $0 \leqslant j \leqslant n$ (wegen (2)) und $v = a^q$ mit $1 \leqslant q \leqslant j$ (wegen (1))

Somit: $z = a^p a^q a^r b a^n b$ mit $p + q + r = n$ und $q \geqslant 1$

S14 - Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

Um mithilfe des Pumping-Lemmas zu zeigen, dass eine Sprache L nicht regulär ist, zeigt man, dass für sie die Aussage des Pumping-Lemmas nicht gilt. Zeigen Sie, dass die Sprache $L = \{a^i b a^i b \mid i \geqslant 1\}$ nicht regulär ist.

Annahme: L erfüllt das Pumping-Lemma. D.h. es gibt $n \geqslant 0$, so dass für jedes $z \in L$ mit $|z| \geqslant n$ eine Aufteilung $z = uvw$ existiert mit:

(1) $|v| \geqslant 1$ (2) $|uv| \leqslant n$ (3) $uv^k w \in L$ für jedes $k \geqslant 0$.

Für $z = a^n b a^n b$ dann können wir zeigen:

$uv = a^j$ für $0 \leqslant j \leqslant n$ (wegen (2)) und $v = a^q$ mit $1 \leqslant q \leqslant j$ (wegen (1))

Somit: $z = a^p a^q a^r b a^n b$ mit $p + q + r = n$ und $q \geqslant 1$

Damit hat $z_k = uv^k w$ die Form $a^p (a^q)^k a^r b a^n b$.

S14 - Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

Um mithilfe des Pumping-Lemmas zu zeigen, dass eine Sprache L nicht regulär ist, zeigt man, dass für sie die Aussage des Pumping-Lemmas nicht gilt. Zeigen Sie, dass die Sprache $L = \{a^i b a^i b \mid i \geqslant 1\}$ nicht regulär ist.

Annahme: L erfüllt das Pumping-Lemma. D.h. es gibt $n \geqslant 0$, so dass für jedes $z \in L$ mit $|z| \geqslant n$ eine Aufteilung $z = uvw$ existiert mit:

(1) $|v| \geqslant 1$ (2) $|uv| \leqslant n$ (3) $uv^k w \in L$ für jedes $k \geqslant 0$.

Für $z = a^n b a^n b$ dann können wir zeigen:

$uv = a^j$ für $0 \leqslant j \leqslant n$ (wegen (2)) und $v = a^q$ mit $1 \leqslant q \leqslant j$ (wegen (1))

Somit: $z = a^p a^q a^r b a^n b$ mit $p + q + r = n$ und $q \geqslant 1$

Damit hat $z_k = uv^k w$ die Form $a^p (a^q)^k a^r b a^n b$.

Aber $z_0 = a^p a^r b a^n b \notin L$ (da $p + r < n$).

S14 - Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

Um mithilfe des Pumping-Lemmas zu zeigen, dass eine Sprache L nicht regulär ist, zeigt man, dass für sie die Aussage des Pumping-Lemmas nicht gilt. Zeigen Sie, dass die Sprache $L = \{a^i b a^i b \mid i \geqslant 1\}$ nicht regulär ist.

Annahme: L erfüllt das Pumping-Lemma. D.h. es gibt $n \geqslant 0$, so dass für jedes $z \in L$ mit $|z| \geqslant n$ eine Aufteilung $z = uvw$ existiert mit:

(1) $|v| \geqslant 1$ (2) $|uv| \leqslant n$ (3) $uv^k w \in L$ für jedes $k \geqslant 0$.

Für $z = a^n b a^n b$ dann können wir zeigen:

$uv = a^j$ für $0 \leqslant j \leqslant n$ (wegen (2)) und $v = a^q$ mit $1 \leqslant q \leqslant j$ (wegen (1))

Somit: $z = a^p a^q a^r b a^n b$ mit $p + q + r = n$ und $q \geqslant 1$

Damit hat $z_k = uv^k w$ die Form $a^p (a^q)^k a^r b a^n b$.

Aber $z_0 = a^p a^r b a^n b \notin L$ (da $p + r < n$). Widerspruch!

S15 - Anwendung des Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus

Betrachten Sie die Grammatik $G = (\{S, U, X, T, V, W, Y, D, E, A, B, C\}, \Sigma, P, S)$ mit $\Sigma = \{a, b, c\}$ und

$$\begin{array}{rclllll} P & = & \{ & S \longrightarrow UT, & S \longrightarrow VW, & U \longrightarrow XB, & U \longrightarrow AB, \\ & & & X \longrightarrow AU, & T \longrightarrow TC, & T \longrightarrow c, & V \longrightarrow AV, \\ & & & V \longrightarrow a, & W \longrightarrow BY, & W \longrightarrow BC, & Y \longrightarrow WC, \\ & & & D \longrightarrow BC, & D \longrightarrow BB, & D \longrightarrow b, & E \longrightarrow AB, \\ & & & E \longrightarrow AA, & A \longrightarrow a, & B \longrightarrow b, & C \longrightarrow c \quad \}. \end{array}$$

Verwenden Sie den CYK-Algorithmus (mit der Matrix-Notation aus der Vorlesung), um für die Wörter $w_1 = aabcc$ und $w_2 = aabbcc$ zu entscheiden, ob $w_i \in L(G)$ ist.

S15 - Anwendung des Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus

Betrachten Sie die Grammatik $G = (\{S, U, X, T, V, W, Y, D, E, A, B, C\}, \Sigma, P, S)$ mit $\Sigma = \{a, b, c\}$ und

$$P = \{ \begin{array}{llll} S \longrightarrow UT, & S \longrightarrow VW, & U \longrightarrow XB, & U \longrightarrow AB, \\ X \longrightarrow AU, & T \longrightarrow TC, & T \longrightarrow c, & V \longrightarrow AV, \\ V \longrightarrow a, & W \longrightarrow BY, & W \longrightarrow BC, & Y \longrightarrow WC, \\ D \longrightarrow BC, & D \longrightarrow BB, & D \longrightarrow b, & E \longrightarrow AB, \\ E \longrightarrow AA, & A \longrightarrow a, & B \longrightarrow b, & C \longrightarrow c \end{array} \}.$$

Verwenden Sie den CYK-Algorithmus (mit der Matrix-Notation aus der Vorlesung), um für die Wörter $w_1 = aabcc$ und $w_2 = aabbcc$ zu entscheiden, ob $w_i \in L(G)$ ist.

Die Grammatik vom Typ 2 (kontextfrei) und bereits in Chomsky-Normalform (CNF).

S15 - Anwendung des Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus

Betrachten Sie die Grammatik $G = (\{S, U, X, T, V, W, Y, D, E, A, B, C\}, \Sigma, P, S)$ mit $\Sigma = \{a, b, c\}$ und

$$
\begin{array}{rcllll}
P & = & \{ & S \longrightarrow UT, & S \longrightarrow VW, & U \longrightarrow XB, \quad U \longrightarrow AB, \\
 & & & X \longrightarrow AU, & T \longrightarrow TC, & T \longrightarrow c, \quad V \longrightarrow AV, \\
 & & & V \longrightarrow a, & W \longrightarrow BY, & W \longrightarrow BC, \quad Y \longrightarrow WC, \\
 & & & D \longrightarrow BC, & D \longrightarrow BB, & D \longrightarrow b, \quad E \longrightarrow AB, \\
 & & & E \longrightarrow AA, & A \longrightarrow a, & B \longrightarrow b, \quad C \longrightarrow c \quad \}.
\end{array}
$$

Verwenden Sie den CYK-Algorithmus (mit der Matrix-Notation aus der Vorlesung), um für die Wörter $w_1 = aabcc$ und $w_2 = aabbcc$ zu entscheiden, ob $w_i \in L(G)$ ist.

Die Grammatik vom Typ 2 (kontextfrei) und bereits in Chomsky-Normalform (CNF).

Nächster Schritt: Zusammenfassung mit gleichem Nichtterminal $N \longrightarrow \ldots$ und entfernen unerreichbarer Teile.

S15 - Anwendung des Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus

Vereinfachung:

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow UT \mid VW \\
U &\rightarrow XB \mid AB \\
X &\rightarrow AU \\
T &\rightarrow TC \mid c \\
V &\rightarrow AV \mid a \\
W &\rightarrow BY \mid BC \\
Y &\rightarrow WC \\
A &\rightarrow a \\
B &\rightarrow b \\
C &\rightarrow c
\end{aligned}
$$

(D und E nicht erreichbar)

S15 - Anwendung des Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus

Vereinfachung:

$$
\begin{aligned}
S &\to UT \mid VW \\
U &\to XB \mid AB \\
X &\to AU \\
T &\to TC \mid c \\
V &\to AV \mid a \\
W &\to BY \mid BC \\
Y &\to WC \\
A &\to a \\
B &\to b \\
C &\to c
\end{aligned}
$$

(D und E nicht erreichbar)

$w_1 = aabcc \notin L(G)$:

a					
a					
b					
c					
c					
	a	a	b	c	c

S15 - Anwendung des Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus

Vereinfachung:

$$S \to UT \mid VW$$
$$U \to XB \mid AB$$
$$X \to AU$$
$$T \to TC \mid c$$
$$V \to AV \mid a$$
$$W \to BY \mid BC$$
$$Y \to WC$$
$$A \to a$$
$$B \to b$$
$$C \to c$$

(D und E nicht erreichbar)

$w_1 = aabcc \notin L(G)$:

a	$\{A, V\}$				
a					
b					
c					
c					
	a	a	b	c	c

S15 - Anwendung des Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus

Vereinfachung:

$$
\begin{aligned}
S &\to UT \mid VW \\
U &\to XB \mid AB \\
X &\to AU \\
T &\to TC \mid c \\
V &\to AV \mid a \\
W &\to BY \mid BC \\
Y &\to WC \\
A &\to a \\
B &\to b \\
C &\to c
\end{aligned}
$$

(D und E nicht erreichbar)

$w_1 = aabcc \notin L(G)$:

a	$\{A, V\}$				
a		$\{A, V\}$			
b			$\{B\}$		
c					
c					
	a	a	b	c	c

S15 - Anwendung des Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus

Vereinfachung:

$$S \to UT \mid VW$$
$$U \to XB \mid AB$$
$$X \to AU$$
$$T \to TC \mid c$$
$$V \to AV \mid a$$
$$W \to BY \mid BC$$
$$Y \to WC$$
$$A \to a$$
$$B \to b$$
$$C \to c$$

(D und E nicht erreichbar)

$w_1 = aabcc \notin L(G)$:

a	$\{A, V\}$				
a		$\{A, V\}$			
b			$\{B\}$		
c				$\{C, T\}$	
c					$\{C, T\}$
	a	a	b	c	c

S15 - Anwendung des Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus

Vereinfachung:

$$S \to UT \mid VW$$
$$U \to XB \mid AB$$
$$X \to AU$$
$$T \to TC \mid c$$
$$V \to AV \mid a$$
$$W \to BY \mid BC$$
$$Y \to WC$$
$$A \to a$$
$$B \to b$$
$$C \to c$$

(D und E nicht erreichbar)

$w_1 = aabcc \notin L(G)$:

a	$\{A, V\}$	$\{V\}$			
a		$\{A, V\}$			
b			$\{B\}$		
c				$\{C, T\}$	
c					$\{C, T\}$
	a	a	b	c	c

S15 - Anwendung des Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus

Vereinfachung:

$$S \to UT \mid VW$$
$$U \to XB \mid AB$$
$$X \to AU$$
$$T \to TC \mid c$$
$$V \to AV \mid a$$
$$W \to BY \mid BC$$
$$Y \to WC$$
$$A \to a$$
$$B \to b$$
$$C \to c$$

(D und E nicht erreichbar)

$w_1 = aabcc \notin L(G)$:

a	$\{A, V\}$	$\{V\}$			
a		$\{A, V\}$	$\{U\}$		
b			$\{B\}$	$\{W\}$	
c				$\{C, T\}$	$\{T\}$
c					$\{C, T\}$
	a	a	b	c	c

S15 - Anwendung des Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus

Vereinfachung:

$$S \rightarrow UT \mid VW$$
$$U \rightarrow XB \mid AB$$
$$X \rightarrow AU$$
$$T \rightarrow TC \mid c$$
$$V \rightarrow AV \mid a$$
$$W \rightarrow BY \mid BC$$
$$Y \rightarrow WC$$
$$A \rightarrow a$$
$$B \rightarrow b$$
$$C \rightarrow c$$

(D und E nicht erreichbar)

$w_1 = aabcc \notin L(G)$:

a	$\{A, V\}$	$\{V\}$	$\{X\}$		
a		$\{A, V\}$	$\{U\}$		
b			$\{B\}$	$\{W\}$	
c				$\{C, T\}$	$\{T\}$
c					$\{C, T\}$
	a	a	b	c	c

S15 - Anwendung des Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus

Vereinfachung:

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow UT \mid VW \\
U &\rightarrow XB \mid AB \\
X &\rightarrow AU \\
T &\rightarrow TC \mid c \\
V &\rightarrow AV \mid a \\
W &\rightarrow BY \mid BC \\
Y &\rightarrow WC \\
A &\rightarrow a \\
B &\rightarrow b \\
C &\rightarrow c
\end{aligned}
$$

(D und E nicht erreichbar)

$w_1 = aabcc \notin L(G)$:

a	$\{A, V\}$	$\{V\}$	$\{X\}$		
a		$\{A, V\}$	$\{U\}$		
b			$\{B\}$	$\{W\}$	
c				$\{C, T\}$	$\{T\}$
c					$\{C, T\}$
	a	a	b	c	c

S15 - Anwendung des Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus

Vereinfachung:

$$
\begin{aligned}
\color{red}{S} &\color{red}{\rightarrow UT \mid VW} \\
U &\rightarrow XB \mid AB \\
X &\rightarrow AU \\
T &\rightarrow TC \mid c \\
V &\rightarrow AV \mid a \\
W &\rightarrow BY \mid BC \\
Y &\rightarrow WC \\
A &\rightarrow a \\
B &\rightarrow b \\
C &\rightarrow c
\end{aligned}
$$

(D und E nicht erreichbar)

$w_1 = aabcc \notin L(G)$:

a	$\{A, V\}$	$\{V\}$	$\{X\}$		
a		$\{A, V\}$	$\{U\}$	$\{S\}$	
b			$\{B\}$	$\{W\}$	
c				$\{C, T\}$	$\{T\}$
c					$\{C, T\}$
	a	a	b	c	c

S15 - Anwendung des Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus

Vereinfachung:

$$S \to UT \mid VW$$
$$U \to XB \mid AB$$
$$X \to AU$$
$$T \to TC \mid c$$
$$V \to AV \mid a$$
$$W \to BY \mid BC$$
$$Y \to WC$$
$$A \to a$$
$$B \to b$$
$$C \to c$$

(D und E nicht erreichbar)

$w_1 = aabcc \notin L(G)$:

a	$\{A, V\}$	$\{V\}$	$\{X\}$		
a		$\{A, V\}$	$\{U\}$	$\{S\}$	
b			$\{B\}$	$\{W\}$	$\{Y\}$
c				$\{C, T\}$	$\{T\}$
c					$\{C, T\}$
	a	a	b	c	c

S15 - Anwendung des Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus

Vereinfachung:

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow UT \mid VW \\
U &\rightarrow XB \mid AB \\
X &\rightarrow AU \\
T &\rightarrow TC \mid c \\
V &\rightarrow AV \mid a \\
W &\rightarrow BY \mid BC \\
Y &\rightarrow WC \\
A &\rightarrow a \\
B &\rightarrow b \\
C &\rightarrow c
\end{aligned}
$$

(D und E nicht erreichbar)

$w_1 = aabcc \notin L(G)$:

a	$\{A, V\}$	$\{V\}$	$\{X\}$	$\{S\}$	
a		$\{A, V\}$	$\{U\}$	$\{S\}$	$\{S\}$
b			$\{B\}$	$\{W\}$	$\{Y\}$
c				$\{C, T\}$	$\{T\}$
c					$\{C, T\}$
	a	a	b	c	c

S15 - Anwendung des Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus

Vereinfachung:

$$S \to UT \mid VW$$
$$U \to XB \mid AB$$
$$X \to AU$$
$$T \to TC \mid c$$
$$V \to AV \mid a$$
$$W \to BY \mid BC$$
$$Y \to WC$$
$$A \to a$$
$$B \to b$$
$$C \to c$$

(D und E nicht erreichbar)

$w_1 = aabcc \notin L(G)$:

a	$\{A, V\}$	$\{V\}$	$\{X\}$	$\{S\}$	$\varnothing$
a		$\{A, V\}$	$\{U\}$	$\{S\}$	$\{S\}$
b			$\{B\}$	$\{W\}$	$\{Y\}$
c				$\{C, T\}$	$\{T\}$
c					$\{C, T\}$
	a	a	b	c	c

S15 - Anwendung des Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus

Vereinfachung:

$S \to UT \mid VW$

$U \to XB \mid AB$

$X \to AU$

$T \to TC \mid c$

$V \to AV \mid a$

$W \to BY \mid BC$

$Y \to WC$

$A \to a$

$B \to b$

$C \to c$

(D und E nicht erreichbar)

$w_2 = aabbcc \in L(G)$:

a	$\{A, V\}$	$\{V\}$	$\{X\}$	$\{U\}$	$\{S\}$	$\{S\}$
a		$\{A, V\}$	$\{U\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{S\}$
b			$\{B\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{W\}$
b				$\{B\}$	$\{W\}$	$\{Y\}$
c					$\{C, T\}$	$\{T\}$
c						$\{C, T\}$
	a	a	b	b	c	c

S15 - Anwendung des Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus

Vereinfachung:

$$S \to UT \mid VW$$
$$U \to XB \mid AB$$
$$X \to AU$$
$$T \to TC \mid c$$
$$V \to AV \mid a$$
$$W \to BY \mid BC$$
$$Y \to WC$$
$$A \to a$$
$$B \to b$$
$$C \to c$$

(D und E nicht erreichbar)

$w_2 = aabbcc \in L(G)$:

a	$\{A, V\}$	$\{V\}$	$\{X\}$	$\{U\}$	$\{S\}$	$\{S\}$
a		$\{A, V\}$	$\{U\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{S\}$
b			$\{B\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{W\}$
b				$\{B\}$	$\{W\}$	$\{Y\}$
c					$\{C, T\}$	$\{T\}$
c						$\{C, T\}$
	a	a	b	b	c	c

S15 - Anwendung des Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus

Vereinfachung:

$$
\begin{aligned}
S &\to UT \mid VW \\
U &\to XB \mid AB \\
X &\to AU \\
T &\to TC \mid c \\
V &\to AV \mid a \\
W &\to BY \mid BC \\
Y &\to WC \\
A &\to a \\
B &\to b \\
C &\to c
\end{aligned}
$$

(D und E nicht erreichbar)

$w_2 = aabbcc \in L(G)$:

a	$\{A, V\}$	$\{V\}$	$\{X\}$	$\{U\}$	$\{S\}$	$\{S\}$
a		$\{A, V\}$	$\{U\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{S\}$
b			$\{B\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{W\}$
b				$\{B\}$	$\{W\}$	$\{Y\}$
c					$\{C, T\}$	$\{T\}$
c						$\{C, T\}$
	a	a	b	b	c	c

S15 - Anwendung des Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus

Vereinfachung:

$$S \rightarrow UT \mid VW$$
$$U \rightarrow XB \mid AB$$
$$X \rightarrow AU$$
$$T \rightarrow TC \mid c$$
$$V \rightarrow AV \mid a$$
$$W \rightarrow BY \mid BC$$
$$Y \rightarrow WC$$
$$A \rightarrow a$$
$$B \rightarrow b$$
$$C \rightarrow c$$

(D und E nicht erreichbar)

$w_2 = aabbcc \in L(G)$:

a	$\{A, V\}$	$\{V\}$	$\{X\}$	$\{U\}$	$\{S\}$	$\{S\}$
a		$\{A, V\}$	$\{U\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{S\}$
b			$\{B\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{W\}$
b				$\{B\}$	$\{W\}$	$\{Y\}$
c					$\{C, T\}$	$\{T\}$
c						$\{C, T\}$
	a	a	b	b	c	c

S15 - Anwendung des Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus

Vereinfachung:

$$S \to UT \mid VW$$
$$U \to XB \mid AB$$
$$X \to AU$$
$$T \to TC \mid c$$
$$V \to AV \mid a$$
$$W \to BY \mid BC$$
$$Y \to WC$$
$$A \to a$$
$$B \to b$$
$$C \to c$$

(D und E nicht erreichbar)

$w_2 = aabbcc \in L(G)$:

a	$\{A,V\}$	$\{V\}$	$\{X\}$	$\{U\}$	$\{S\}$	$\{S\}$
a		$\{A,V\}$	$\{U\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{S\}$
b			$\{B\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{W\}$
b				$\{B\}$	$\{W\}$	$\{Y\}$
c					$\{C,T\}$	$\{T\}$
c						$\{C,T\}$
	a	a	b	b	c	c

S15 - Anwendung des Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus

Vereinfachung:

$$\begin{aligned}
S &\to UT \mid VW \\
U &\to XB \mid AB \\
X &\to AU \\
T &\to TC \mid c \\
V &\to AV \mid a \\
W &\to BY \mid BC \\
Y &\to WC \\
A &\to a \\
B &\to b \\
C &\to c
\end{aligned}$$

(D und E nicht erreichbar)

$w_2 = aabbcc \in L(G)$:

a	$\{A,V\}$	$\{V\}$	$\{X\}$	$\{U\}$	$\{S\}$	$\{S\}$
a		$\{A,V\}$	$\{U\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{S\}$
b			$\{B\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{W\}$
b				$\{B\}$	$\{W\}$	$\{Y\}$
c					$\{C,T\}$	$\{T\}$
c						$\{C,T\}$
	a	a	b	b	c	c

$$L(G) = \{a^m b^n c^k \mid (n = m \vee m = k) \wedge m,n,k \geqslant 1\}$$

S16 - Kontextfreie Grammatiken ε-frei, CNF, CYK

Gegeben sind das Wort $w = aaaab$ und die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit
$V = \{S, A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und

$$\begin{aligned} P \quad = \quad & \{S \longrightarrow AB, S \longrightarrow BC, S \longrightarrow bab, \\ & A \longrightarrow BA, A \longrightarrow a, \\ & B \longrightarrow ABC, B \longrightarrow b, \\ & C \longrightarrow AB, C \longrightarrow a, C \longrightarrow \varepsilon\}\,. \end{aligned}$$

a) Transformieren Sie die Grammatik G in eine ε-freie Grammatik G'.

b) Transformieren Sie die Grammatik G' in ihre *Chomsky*-Normalform.

c) Entscheiden Sie mithilfe des CYK-Algorithmus, ob $w \in L(G)$ gilt.

S16 - Kontextfreie Grammatiken ε-frei

Gegeben sind das Wort $w = aaaab$ und die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B, C\}, \Sigma = \{a, b\}$ und

$$
\begin{aligned}
P \quad = \quad & \{S \longrightarrow AB, S \longrightarrow BC, S \longrightarrow bab, \\
& A \longrightarrow BA, A \longrightarrow a, \\
& B \longrightarrow ABC, B \longrightarrow b, \\
& C \longrightarrow AB, C \longrightarrow a, C \longrightarrow \varepsilon\} \,.
\end{aligned}
$$

a) Sei $V_\varepsilon = \{C\}$ Menge aller Variablen, die direkt auf ε abgebildet werden können. Aufdoppeln der Regeln für jede Variable aus V_ε und entfernen der ε-Regeln:

S16 - Kontextfreie Grammatiken ε-frei

Gegeben sind das Wort $w = aaaab$ und die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B, C\}, \Sigma = \{a, b\}$ und

$$\begin{aligned} P \quad = \quad & \{S \longrightarrow AB, S \longrightarrow BC, S \longrightarrow bab, \\ & A \longrightarrow BA, A \longrightarrow a, \\ & B \longrightarrow ABC, B \longrightarrow b, \\ & C \longrightarrow AB, C \longrightarrow a, C \longrightarrow \varepsilon\}\,. \end{aligned}$$

a) Sei $V_\varepsilon = \{C\}$ Menge aller Variablen, die direkt auf ε abgebildet werden können. Aufdoppeln der Regeln für jede Variable aus V_ε und entfernen der ε-Regeln:

$$\begin{aligned} P_1 = \{& S \to AB \mid B \mid BC \mid bab, \\ & A \to BA \mid a, \\ & B \to ABC \mid AB \mid b, \\ & C \to AB \mid a\} \end{aligned}$$

S16 - Kontextfreie Grammatiken ε-frei

Gegeben sind das Wort $w = aaaab$ und die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B, C\}, \Sigma = \{a, b\}$ und

$$\begin{aligned} P = \{ & S \longrightarrow AB, S \longrightarrow BC, S \longrightarrow bab, \\ & A \longrightarrow BA, A \longrightarrow a, \\ & B \longrightarrow ABC, B \longrightarrow b, \\ & C \longrightarrow AB, C \longrightarrow a, C \longrightarrow \varepsilon\} \,. \end{aligned}$$

a) Sei $V_\varepsilon = \{C\}$ Menge aller Variablen, die direkt auf ε abgebildet werden können. Aufdoppeln der Regeln für jede Variable aus V_ε und entfernen der ε-Regeln:

$$\begin{aligned} P_1 = \{ & S \rightarrow AB \mid B \mid BC \mid bab, \\ & A \rightarrow BA \mid a, \\ & B \rightarrow ABC \mid AB \mid b, \\ & C \rightarrow AB \mid a\} \end{aligned}$$

Da das leere Wort nicht in G erzeugt werden kann, müssen wir kein neues Startsymbol einführen. (V, Σ, P_1, S) ist die gewünschte ε-freie Grammatik G'.

S16 - Kontextfreie Grammatiken ε-frei, CNF, CYK

Gegeben sind das Wort $w = aaaab$ und die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und

$$
\begin{aligned}
P_1 = \{S &\rightarrow AB \mid B \mid BC \mid bab, \\
A &\rightarrow BA \mid a, \\
B &\rightarrow ABC \mid AB \mid b, \\
C &\rightarrow AB \mid a\}
\end{aligned}
$$

b) Eliminieren aller Kettenregeln

S16 - Kontextfreie Grammatiken ε-frei, CNF, CYK

Gegeben sind das Wort $w = aaaab$ und die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B, C\}, \Sigma = \{a, b\}$ und

$$\begin{aligned} P_1 = \{S &\rightarrow AB \mid B \mid BC \mid bab, \\ A &\rightarrow BA \mid a, \\ B &\rightarrow ABC \mid AB \mid b, \\ C &\rightarrow AB \mid a\} \end{aligned}$$

b) Eliminieren aller Kettenregeln:

$$\begin{aligned} P_2 = \{S &\rightarrow AB \mid ABC \mid b \mid BC \mid bab, \\ A &\rightarrow BA \mid a, \\ B &\rightarrow ABC \mid AB \mid b, \\ C &\rightarrow AB \mid a\} \end{aligned}$$

S16 - Kontextfreie Grammatiken ε-frei, CNF, CYK

Gegeben sind das Wort $w = aaaab$ und die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und

$$\begin{aligned} P_1 = \{S &\to AB \mid B \mid BC \mid bab, \\ A &\to BA \mid a, \\ B &\to ABC \mid AB \mid b, \\ C &\to AB \mid a\} \end{aligned}$$

b) Eliminieren aller Kettenregeln:

$$\begin{aligned} P_2 = \{S &\to AB \mid ABC \mid b \mid BC \mid bab, \\ A &\to BA \mid a, \\ B &\to ABC \mid AB \mid b, \\ C &\to AB \mid a\} \end{aligned}$$

S16 - Kontextfreie Grammatiken CNF

Gegeben sind das Wort $w = aaaab$ und die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B, C\}, \Sigma = \{a, b\}$ und

$$\begin{aligned} P_2 = \{S &\to AB \mid ABC \mid b \mid BC \mid bab, \\ A &\to BA \mid a, \\ B &\to ABC \mid AB \mid b, \\ C &\to AB \mid a\} \end{aligned}$$

Um P_2 in CNF umzuwandeln führen wir zusätzliche Variablen ein:

S16 - Kontextfreie Grammatiken CNF

Gegeben sind das Wort $w = aaaab$ und die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B, C\}, \Sigma = \{a, b\}$ und

$$\begin{aligned} P_2 = \{S &\to AB \mid ABC \mid b \mid BC \mid bab, \\ A &\to BA \mid a, \\ B &\to ABC \mid AB \mid b, \\ C &\to AB \mid a\} \end{aligned}$$

Um P_2 in CNF umzuwandeln führen wir zusätzliche Variablen ein:

$$\begin{aligned} P_3 = \{S &\to AB \mid AY_{BC} \mid b \mid BC \mid X_b Y_{ab}, \\ A &\to BA \mid a, \\ B &\to AY_{BC} \mid AB \mid b, \\ C &\to AB \mid a, \\ Y_{BC} &\to BC, \ \mid Y_{ab} \to X_a X_b, \\ X_a &\to a, \ \ X_b \to b\} \end{aligned}$$

S16 - Kontextfreie Grammatiken CYK

Gegeben sind das Wort $w = aaaab$ und die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit
$V = \{S, A, B, C\}, \Sigma = \{a, b\}$ und

$$\begin{aligned} P_3 = \{S &\rightarrow AB \mid AY_{BC} \mid b \mid BC \mid X_b Y_{ab}, \\ A &\rightarrow BA \mid a, \\ B &\rightarrow AY_{BC} \mid AB \mid b, \\ C &\rightarrow AB \mid a, \\ Y_{BC} &\rightarrow BC, \;\; Y_{ab} \rightarrow X_a X_b, \;\; X_a \rightarrow a, \;\; X_b \rightarrow b\} \end{aligned}$$

c) CYK-Tabelle

S16 - Kontextfreie Grammatiken CYK

Gegeben sind das Wort $w = aaaab$ und die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B, C\}, \Sigma = \{a, b\}$ und

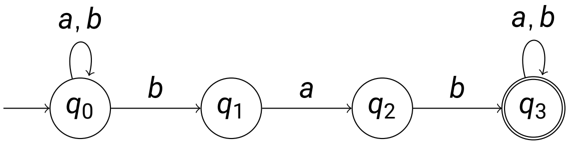
$$\begin{aligned} P_3 = \{S &\to AB \mid AY_{BC} \mid b \mid BC \mid X_bY_{ab}, \\ A &\to BA \mid a, \\ B &\to AY_{BC} \mid AB \mid b, \\ C &\to AB \mid a, \\ Y_{BC} &\to BC, \quad Y_{ab} \to X_aX_b, \quad X_a \to a, \quad X_b \to b\} \end{aligned}$$

c) CYK-Tabelle:

a	$\{X_a, A, C\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
a		$\{X_a, A, C\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
a			$\{X_a, A, C\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
a				$\{X_a, A, C\}$	$\{Y_{ab}, B, C, S\}$
b					$\{X_b, B\}$
	a	a	a	a	b

S17 - NFA nach regulärer Ausdruck, DFA, Komplementsprache

Gegeben: NFA $\mathcal{M}_1 = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \delta, \{q_0\}, \{q_3\})$ mit δ:

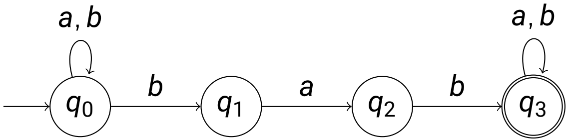


a) Berechnen Sie mithilfe des *Arden*-Lemmas einen regulären Ausdruck α mit $L(\mathcal{M}_1) = L(\alpha)$.

b) Geben Sie einen DFA $\overline{\mathcal{M}_2}$ an, der das Komplement von L akzeptiert, indem Sie aus $\mathcal{M}_1$ einen DFA $\mathcal{M}_2$ für L und aus $\mathcal{M}_2$ anschließend den Komplementautomaten $\overline{\mathcal{M}_2}$ bilden.

S17 - NFA nach regulärer Ausdruck, DFA, Komplementsprache

Gegeben: NFA $\mathcal{M}_1 = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \delta, \{q_0\}, \{q_3\})$ mit δ:

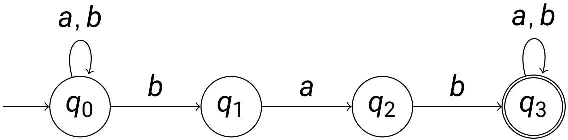


Folgende Formeln ergeben sich durch Überführung der einzelnen Zustände:

$$\alpha_0 \equiv a\alpha_0 \mid b\alpha_0 \mid b\alpha_1$$

S17 - NFA nach regulärer Ausdruck, DFA, Komplementsprache

Gegeben: NFA $\mathcal{M}_1 = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \delta, \{q_0\}, \{q_3\})$ mit δ:



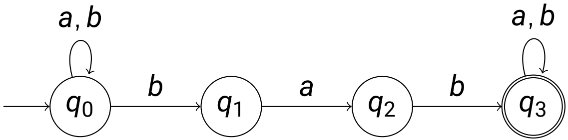
Folgende Formeln ergeben sich durch Überführung der einzelnen Zustände:

$$\alpha_0 \equiv a\alpha_0 \mid b\alpha_0 \mid b\alpha_1$$

$$\alpha_1 \equiv a\alpha_2$$

S17 - NFA nach regulärer Ausdruck, DFA, Komplementsprache

Gegeben: NFA $\mathcal{M}_1 = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \delta, \{q_0\}, \{q_3\})$ mit δ:

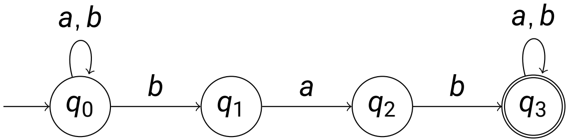


Folgende Formeln ergeben sich durch Überführung der einzelnen Zustände:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &\equiv a\alpha_0 \mid b\alpha_0 \mid b\alpha_1 \\
\alpha_1 &\equiv a\alpha_2 \\
\alpha_2 &\equiv b\alpha_3
\end{aligned}$$

S17 - NFA nach regulärer Ausdruck, DFA, Komplementsprache

Gegeben: NFA $\mathcal{M}_1 = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \delta, \{q_0\}, \{q_3\})$ mit δ:

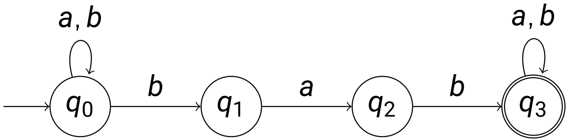


Folgende Formeln ergeben sich durch Überführung der einzelnen Zustände:

$$
\begin{aligned}
\alpha_0 &\equiv a\alpha_0 \mid b\alpha_0 \mid b\alpha_1 \\
\alpha_1 &\equiv a\alpha_2 \\
\alpha_2 &\equiv b\alpha_3 \\
\alpha_3 &\equiv a\alpha_3 \mid b\alpha_3 \mid \varepsilon
\end{aligned}
$$

S17 - NFA nach regulärer Ausdruck, DFA, Komplementsprache

Gegeben: NFA $\mathcal{M}_1 = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \delta, \{q_0\}, \{q_3\})$ mit δ:

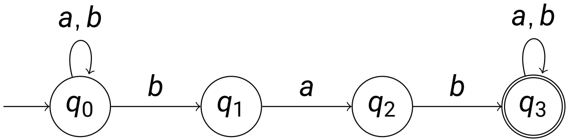


Folgende Formeln ergeben sich durch Überführung der einzelnen Zustände:

$$
\begin{aligned}
\alpha_0 &\equiv a\alpha_0 \mid b\alpha_0 \mid b\alpha_1 \\
\alpha_1 &\equiv a\alpha_2 \\
\alpha_2 &\equiv b\alpha_3 \\
\alpha_3 &\equiv a\alpha_3 \mid b\alpha_3 \mid \varepsilon \qquad \equiv \quad (a \mid b)\,\alpha_3 \mid \varepsilon
\end{aligned}
$$

S17 - NFA nach regulärer Ausdruck, DFA, Komplementsprache

Gegeben: NFA $\mathcal{M}_1 = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \delta, \{q_0\}, \{q_3\})$ mit δ:

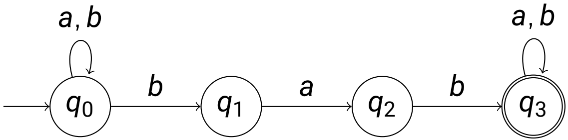


Folgende Formeln ergeben sich durch Überführung der einzelnen Zustände:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &\equiv a\alpha_0 \mid b\alpha_0 \mid b\alpha_1 \\
\alpha_1 &\equiv a\alpha_2 \\
\alpha_2 &\equiv b\alpha_3 \\
\alpha_3 &\equiv a\alpha_3 \mid b\alpha_3 \mid \varepsilon \quad \equiv \quad (a \mid b)\,\alpha_3 \mid \varepsilon \quad \equiv \quad (a \mid b)^*
\end{aligned}$$

S17 - NFA nach regulärer Ausdruck, DFA, Komplementsprache

Gegeben: NFA $\mathcal{M}_1 = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \delta, \{q_0\}, \{q_3\})$ mit δ:

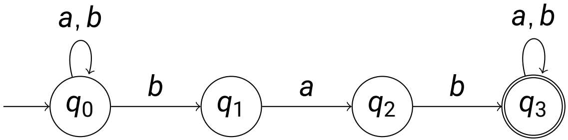


Folgende Formeln ergeben sich durch Überführung der einzelnen Zustände:

$$
\begin{aligned}
\alpha_0 &\equiv a\alpha_0 \mid b\alpha_0 \mid b\alpha_1 \\
\alpha_1 &\equiv a\alpha_2 \\
\alpha_2 &\equiv b\alpha_3 && \equiv b(a \mid b)^* \\
\alpha_3 &\equiv a\alpha_3 \mid b\alpha_3 \mid \varepsilon && \equiv (a \mid b)\,\alpha_3 \mid \varepsilon && \equiv (a \mid b)^*
\end{aligned}
$$

S17 - NFA nach regulärer Ausdruck, DFA, Komplementsprache

Gegeben: NFA $\mathcal{M}_1 = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \delta, \{q_0\}, \{q_3\})$ mit δ:

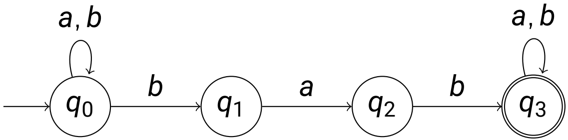


Folgende Formeln ergeben sich durch Überführung der einzelnen Zustände:

$$
\begin{aligned}
\alpha_0 &\equiv a\alpha_0 \mid b\alpha_0 \mid b\alpha_1 \\
\alpha_1 &\equiv a\alpha_2 &&\equiv ab(a \mid b)^* \\
\alpha_2 &\equiv b\alpha_3 &&\equiv b(a \mid b)^* \\
\alpha_3 &\equiv a\alpha_3 \mid b\alpha_3 \mid \varepsilon &&\equiv (a \mid b)\,\alpha_3 \mid \varepsilon &&\equiv (a \mid b)^*
\end{aligned}
$$

S17 - NFA nach regulärer Ausdruck, DFA, Komplementsprache

Gegeben: NFA $\mathcal{M}_1 = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \delta, \{q_0\}, \{q_3\})$ mit δ:

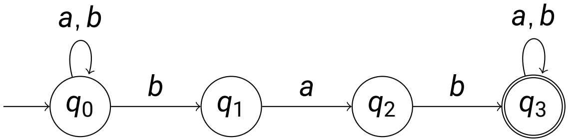


Folgende Formeln ergeben sich durch Überführung der einzelnen Zustände:

$$
\begin{aligned}
\alpha_0 &\equiv a\alpha_0 \mid b\alpha_0 \mid b\alpha_1 &&\equiv (a \mid b)\,\alpha_0 \mid bab(a \mid b)^* \\
\alpha_1 &\equiv a\alpha_2 &&\equiv ab(a \mid b)^* \\
\alpha_2 &\equiv b\alpha_3 &&\equiv b(a \mid b)^* \\
\alpha_3 &\equiv a\alpha_3 \mid b\alpha_3 \mid \varepsilon &&\equiv (a \mid b)\,\alpha_3 \mid \varepsilon &&\equiv (a \mid b)^*
\end{aligned}
$$

S17 - NFA nach regulärer Ausdruck, DFA, Komplementsprache

Gegeben: NFA $\mathcal{M}_1 = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \delta, \{q_0\}, \{q_3\})$ mit δ:

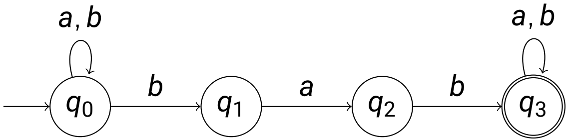


Folgende Formeln ergeben sich durch Überführung der einzelnen Zustände:

$$
\begin{aligned}
\alpha_0 &\equiv a\alpha_0 \mid b\alpha_0 \mid b\alpha_1 &&\equiv (a \mid b)\,\alpha_0 \mid bab(a \mid b)^* &&\equiv (a \mid b)^* bab(a \mid b)^* \\
\alpha_1 &\equiv a\alpha_2 &&\equiv ab(a \mid b)^* && \\
\alpha_2 &\equiv b\alpha_3 &&\equiv b(a \mid b)^* && \\
\alpha_3 &\equiv a\alpha_3 \mid b\alpha_3 \mid \varepsilon &&\equiv (a \mid b)\,\alpha_3 \mid \varepsilon &&\equiv (a \mid b)^*
\end{aligned}
$$

S17 - NFA nach regulärer Ausdruck, DFA, Komplementsprache

Gegeben: NFA $\mathcal{M}_1 = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \delta, \{q_0\}, \{q_3\})$ mit δ:



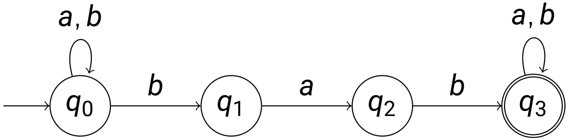
Folgende Formeln ergeben sich durch Überführung der einzelnen Zustände:

$$
\begin{aligned}
\alpha_0 &\equiv a\alpha_0 \mid b\alpha_0 \mid b\alpha_1 &&\equiv (a \mid b)\,\alpha_0 \mid bab(a \mid b)^* &&\equiv (a \mid b)^* bab(a \mid b)^* \\
\alpha_1 &\equiv a\alpha_2 &&\equiv ab(a \mid b)^* && \\
\alpha_2 &\equiv b\alpha_3 &&\equiv b(a \mid b)^* && \\
\alpha_3 &\equiv a\alpha_3 \mid b\alpha_3 \mid \varepsilon &&\equiv (a \mid b)\,\alpha_3 \mid \varepsilon &&\equiv (a \mid b)^*
\end{aligned}
$$

Wie erwartet gilt $L(\mathcal{M}_1) = L(\alpha_0)$.

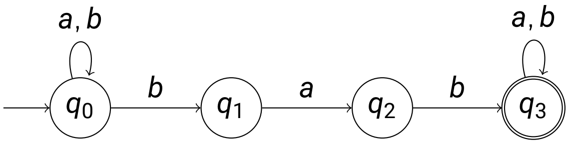
S17 - NFA nach regulärer Ausdruck, DFA, Komplementsprache

Gegeben: NFA $\mathcal{M}_1 = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \delta, \{q_0\}, \{q_3\})$ mit δ:



S17 - NFA nach regulärer Ausdruck, DFA, Komplementsprache

Gegeben: NFA $\mathcal{M}_1 = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \delta, \{q_0\}, \{q_3\})$ mit δ:



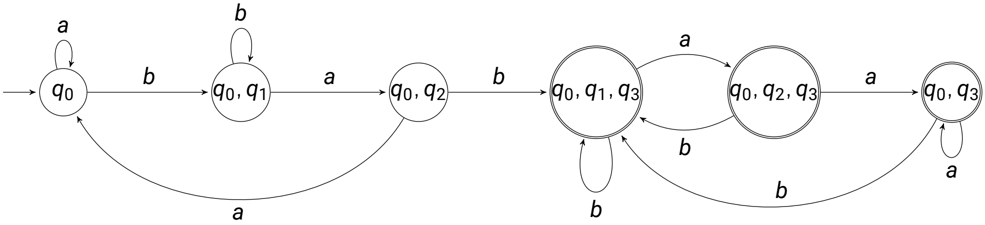
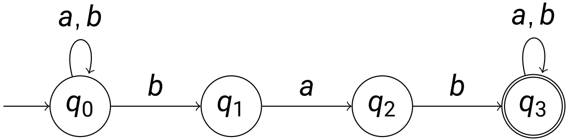


Abbildung: DFA $\mathcal{M}_2$ nach Potenzmengenkonstruktion

S17 - NFA nach regulärer Ausdruck, DFA, Komplementsprache

Gegeben: NFA $\mathcal{M}_1 = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \delta, \{q_0\}, \{q_3\})$ mit δ:



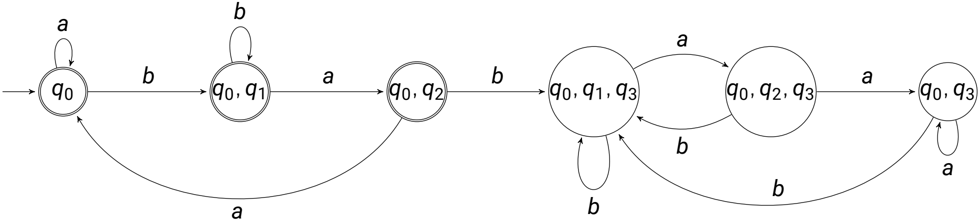


Abbildung: DFA $\overline{\mathcal{M}_2}$ für die Komplementsprache

S18 - Maximaler Typ von Grammatiken und Sprachen

a) Gegeben sind die folgenden Grammatiken G_i mit $1 \leqslant i \leqslant 4$:

$$G_1 = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aS, S \to Sb, S \to a\}, S)$$

$$G_2 = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aS, S \to SbS, S \to a\}, S)$$

$$G_3 = (\{S, B\}, \{a, b\}, \{S \to \varepsilon, S \to aSb, aS \to aB, B \to bB, B \to b\}, S)$$

$$G_4 = (\{S, A\}, \{a, b\}, \{S \to a, A \to b\}, S)$$

Geben Sie für jede Grammatik G_i den maximalen Chomsky-Typ j an. Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Gegeben sind die folgenden Sprachen L_i mit $1 \leqslant i \leqslant 4$:

$$L_1 = \{a^n b^n a^n \mid n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1\}$$

$$L_2 = \{\varepsilon, a\}$$

$$L_3 = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, n > m\}$$

$$L_4 = L(\{a\} \circ \{a\}^* \circ \{b\} \circ \{b\}^*) \setminus L_3$$

Geben Sie für jede Sprache L_i den maximalen Chomsky-Typ j an. Begründen Sie Ihre Antwort. Die Darlegung der Beweisidee ist ausreichend.

S18 - Maximaler Typ von Grammatiken und Sprachen

a) Gegeben sind die folgenden Grammatiken G_i mit $1 \leqslant i \leqslant 4$:

$$G_1 = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aS, S \to Sb, S \to a\}, S)$$
$$G_2 = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aS, S \to SbS, S \to a\}, S)$$
$$G_3 = (\{S, B\}, \{a, b\}, \{S \to \varepsilon, S \to aSb, aS \to aB, B \to bB, B \to b\}, S)$$
$$G_4 = (\{S, A\}, \{a, b\}, \{S \to a, A \to b\}, S)$$

Geben Sie für jede Grammatik G_i den maximalen Chomsky-Typ j an. Begründen Sie Ihre Antwort.

S18 - Maximaler Typ von Grammatiken und Sprachen

a) Gegeben sind die folgenden Grammatiken G_i mit $1 \leqslant i \leqslant 4$:

$$G_1 = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aS, S \to Sb, S \to a\}, S)$$

$$G_2 = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aS, S \to SbS, S \to a\}, S)$$

$$G_3 = (\{S, B\}, \{a, b\}, \{S \to \varepsilon, S \to aSb, aS \to aB, B \to bB, B \to b\}, S)$$

$$G_4 = (\{S, A\}, \{a, b\}, \{S \to a, A \to b\}, S)$$

Geben Sie für jede Grammatik G_i den maximalen Chomsky-Typ j an. Begründen Sie Ihre Antwort.

G_1 ist von Typ 2 (ε-frei kontextfrei) und nicht von Typ 3 (regulär).

S18 - Maximaler Typ von Grammatiken und Sprachen

a) Gegeben sind die folgenden Grammatiken G_i mit $1 \leqslant i \leqslant 4$:

$$G_1 = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aS, S \to Sb, S \to a\}, S)$$

$$G_2 = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aS, S \to SbS, S \to a\}, S)$$

$$G_3 = (\{S, B\}, \{a, b\}, \{S \to \varepsilon, S \to aSb, aS \to aB, B \to bB, B \to b\}, S)$$

$$G_4 = (\{S, A\}, \{a, b\}, \{S \to a, A \to b\}, S)$$

Geben Sie für jede Grammatik G_i den maximalen Chomsky-Typ j an. Begründen Sie Ihre Antwort.

G_1 ist von Typ 2 (ε-frei kontextfrei) und nicht von Typ 3 (regulär).

G_2 ist von Typ 2 (ε-frei kontextfrei) und nicht von Typ 3 (regulär).

S18 - Maximaler Typ von Grammatiken und Sprachen

a) Gegeben sind die folgenden Grammatiken G_i mit $1 \leqslant i \leqslant 4$:

$$G_1 = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aS, S \to Sb, S \to a\}, S)$$

$$G_2 = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aS, S \to SbS, S \to a\}, S)$$

$$G_3 = (\{S, B\}, \{a, b\}, \{S \to \varepsilon, S \to aSb, aS \to aB, B \to bB, B \to b\}, S)$$

$$G_4 = (\{S, A\}, \{a, b\}, \{S \to a, A \to b\}, S)$$

Geben Sie für jede Grammatik G_i den maximalen Chomsky-Typ j an. Begründen Sie Ihre Antwort.

G_1 ist von Typ 2 (ε-frei kontextfrei) und nicht von Typ 3 (regulär).

G_2 ist von Typ 2 (ε-frei kontextfrei) und nicht von Typ 3 (regulär).

G_3 ist von Typ 0 und nicht von Typ 1.

S18 - Maximaler Typ von Grammatiken und Sprachen

a) Gegeben sind die folgenden Grammatiken G_i mit $1 \leqslant i \leqslant 4$:

$$G_1 = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aS, S \to Sb, S \to a\}, S)$$

$$G_2 = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aS, S \to SbS, S \to a\}, S)$$

$$G_3 = (\{S, B\}, \{a, b\}, \{S \to \varepsilon, S \to aSb, aS \to aB, B \to bB, B \to b\}, S)$$

$$G_4 = (\{S, A\}, \{a, b\}, \{S \to a, A \to b\}, S)$$

Geben Sie für jede Grammatik G_i den maximalen Chomsky-Typ j an. Begründen Sie Ihre Antwort.

G_1 ist von Typ 2 (ε-frei kontextfrei) und nicht von Typ 3 (regulär).

G_2 ist von Typ 2 (ε-frei kontextfrei) und nicht von Typ 3 (regulär).

G_3 ist von Typ 0 und nicht von Typ 1.

G_4 ist von Typ 3 (regulär).

S18 - Maximaler Typ von Grammatiken und Sprachen

b) Gegeben sind die folgenden Sprachen L_i mit $1 \leqslant i \leqslant 4$:

$$L_1 = \{a^n b^n a^n \mid n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1\}$$

$$L_2 = \{\varepsilon, a\}$$

$$L_3 = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, n > m\}$$

$$L_4 = L(\{a\} \circ \{a\}^* \circ \{b\} \circ \{b\}^*) \setminus L_3$$

Geben Sie für jede Sprache L_i den maximalen Chomsky-Typ j an. Begründen Sie Ihre Antwort. Die Darlegung der Beweisidee ist ausreichend.

S18 - Maximaler Typ von Grammatiken und Sprachen

b) Gegeben sind die folgenden Sprachen L_i mit $1 \leqslant i \leqslant 4$:

$$L_1 = \{a^n b^n a^n \mid n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1\}$$

$$L_2 = \{\varepsilon, a\}$$

$$L_3 = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, n > m\}$$

$$L_4 = L(\{a\} \circ \{a\}^* \circ \{b\} \circ \{b\}^*) \setminus L_3$$

Geben Sie für jede Sprache L_i den maximalen Chomsky-Typ j an. Begründen Sie Ihre Antwort. Die Darlegung der Beweisidee ist ausreichend.

L_1 ist kontextsenitiv. Nachweis über Angabe einer CFG
$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$ mit

$$P = \{S \to aSBA, S \to aBA, AB \to BA, aB \to ab, bB \to bb, bA \to ba, aA \to aa\}$$

(ähnlich wie für die Sprache $L = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$)

S18 - Maximaler Typ von Grammatiken und Sprachen

b) Gegeben sind die folgenden Sprachen L_i mit $1 \leqslant i \leqslant 4$:

$$L_1 = \{a^n b^n a^n \mid n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1\}$$

$$L_2 = \{\varepsilon, a\}$$

$$L_3 = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, n > m\}$$

$$L_4 = L(\{a\} \circ \{a\}^* \circ \{b\} \circ \{b\}^*) \setminus L_3$$

Geben Sie für jede Sprache L_i den maximalen Chomsky-Typ j an. Begründen Sie Ihre Antwort. Die Darlegung der Beweisidee ist ausreichend.

L_1 ist kontextsenitiv. Nachweis über Angabe einer CFG
$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$ mit

$$P = \{S \rightarrow aSBA, S \rightarrow aBA, AB \rightarrow BA, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bA \rightarrow ba, aA \rightarrow aa\}$$

(ähnlich wie für die Sprache $L = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$)

L_2 ist endlich und daher regulär.

S18 - Maximaler Typ von Grammatiken und Sprachen

b) Gegeben sind die folgenden Sprachen L_i mit $1 \leqslant i \leqslant 4$:

$$L_1 = \{a^n b^n a^n \mid n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1\}$$

$$L_2 = \{\varepsilon, a\}$$

$$L_3 = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, n > m\}$$

$$L_4 = L(\{a\} \circ \{a\}^* \circ \{b\} \circ \{b\}^*) \setminus L_3$$

Geben Sie für jede Sprache L_i den maximalen Chomsky-Typ j an. Begründen Sie Ihre Antwort. Die Darlegung der Beweisidee ist ausreichend.

L_3 ist kontextfrei:

$H_1 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ ist kontextfrei
$H_2 = \{a^n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ regulär und damit ebenfalls kontextfrei.
$L_3 = H_2 \circ H_1$ kontextfrei (Abschlusseigenschaften).

S18 - Maximaler Typ von Grammatiken und Sprachen

b) Gegeben sind die folgenden Sprachen L_i mit $1 \leqslant i \leqslant 4$:

$$L_1 = \{a^n b^n a^n \mid n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1\}$$

$$L_2 = \{\varepsilon, a\}$$

$$L_3 = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, n > m\}$$

$$L_4 = L(\{a\} \circ \{a\}^* \circ \{b\} \circ \{b\}^*) \setminus L_3$$

Geben Sie für jede Sprache L_i den maximalen Chomsky-Typ j an. Begründen Sie Ihre Antwort. Die Darlegung der Beweisidee ist ausreichend.

L_3 ist kontextfrei:

$H_1 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ ist kontextfrei
$H_2 = \{a^n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ regulär und damit ebenfalls kontextfrei.
$L_3 = H_2 \circ H_1$ kontextfrei (Abschlusseigenschaften).

$L_4 = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, n \leqslant m\} = H_1 \circ H_3$ mit $H_3 = \{b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ kontextfrei.

S18 - Maximaler Typ von Grammatiken und Sprachen

b) Gegeben sind die folgenden Sprachen L_i mit $1 \leqslant i \leqslant 4$:

$$L_1 = \{a^n b^n a^n \mid n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1\}$$

$$L_2 = \{\varepsilon, a\}$$

$$L_3 = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, n > m\}$$

$$L_4 = L(\{a\} \circ \{a\}^* \circ \{b\} \circ \{b\}^*) \setminus L_3$$

Geben Sie für jede Sprache L_i den maximalen Chomsky-Typ j an. Begründen Sie Ihre Antwort. Die Darlegung der Beweisidee ist ausreichend.

L_3 ist kontextfrei:

$H_1 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ ist kontextfrei
$H_2 = \{a^n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ regulär und damit ebenfalls kontextfrei.
$L_3 = H_2 \circ H_1$ kontextfrei (Abschlusseigenschaften).

$L_4 = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, n \leqslant m\} = H_1 \circ H_3$ mit $H_3 = \{b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ kontextfrei.

L_3, L_4 nicht regulär (Nachweis z.B. via Pumping Lemma).

S19 - Angabe einer Turingmaschine

Gefragt: Turingmaschine $\mathcal{M}_{abc}$, welche die Sprache $L = \{a^i b^i c^i \mid i \geqslant 0\}$ erkennt.

Hinweis: Nutzen Sie die skizzenhafte Beschreibung der Arbeitsweise für eine solche TM aus der Vorlesung. Neben der Darstellung in Diagrammform ist ebenfalls die Darstellung der Übergangsfunktion δ in Tabellenform möglich. Achten Sie auf die Kommentare in der Tabelle.

S19 - Angabe einer Turingmaschine

Gefragt: Turingmaschine $\mathcal{M}_{abc}$, welche die Sprache $L = \{a^i b^i c^i \mid i \geqslant 0\}$ erkennt.

Erste Idee:

1. Laufe über die Eingabe und ersetze jeweils das erstes Vorkommen von a, b und c mit X. Wird ein unerwartetes Zeichen (inkl. $\square$) gelesen, halte verwerfend an.
2. Gehe zurück zum neuen Wortanfang (erstes nicht markiertes Zeichen) und teste auf dem Weg, ob bereits alle Symbole markiert sind. Halte ggf. akzeptierend an.
3. Gehe zu Schritt 1.

S19 - Angabe einer Turingmaschine

Gefragt: Turingmaschine $\mathcal{M}_{abc}$, welche die Sprache $L = \{a^i b^i c^i \mid i \geqslant 0\}$ erkennt.

Konkret: $\mathcal{M}_{abc} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \{q_f\})$ mit $Q = \{q_0, q_f, q_b, q_c, q_{ende?}, q_{ende!}, q_{anfang}\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$, $\Gamma = \{a, b, c, X, \square\}$ und δ bestimmt durch die Tupel folgender Tabelle

S19 - Angabe einer Turingmaschine

Gefragt: Turingmaschine $\mathcal{M}_{abc}$, welche die Sprache $L = \{a^i b^i c^i \mid i \geqslant 0\}$ erkennt.

Konkret: $\mathcal{M}_{abc} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \{q_f\})$ mit $Q = \{q_0, q_f, q_b, q_c, q_{ende?}, q_{ende!}, q_{anfang}\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$, $\Gamma = \{a, b, c, X, \square\}$ und δ bestimmt durch die Tupel folgender Tabelle

q	n	q'	m	A	Kommentar
q_0	$\square$	q_f	$\square$	N	akzeptiere das leere Wort
q_0	X	q_0	X	R	erster Schritt: markiere a mit X, b mit X, c mit X
q_0	a	q_b	X	R	
q_b	a	q_b	a	R	
q_b	X	q_b	X	R	
q_b	b	q_c	X	R	
q_c	b	q_c	b	R	
q_c	X	q_c	X	R	
q_c	c	$q_{ende?}$	X	R	
$q_{ende?}$	$\square$	$q_{ende!}$	$\square$	L	Berechnung ist zu Ende
$q_{ende!}$	X	$q_{ende!}$	X	L	prüfe, ob alle Symbole markiert sind
$q_{ende!}$	$\square$	q_f	$\square$	N	
$q_{ende?}$	c	q_{anfang}	c	L	wiederhole den ersten Schritt
q_{anfang}	X	q_{anfang}	X	L	
q_{anfang}	b	q_{anfang}	b	L	
q_{anfang}	a	q_{anfang}	a	L	
q_{anfang}	$\square$	q_0	$\square$	R	

S20 - Aussagenlogik: Erfüllbarkeit/Gültigkeit

Prüfen Sie mittels Wahrheitstabellen, welche der folgenden Formeln allgemeingültig, erfüllbar oder unerfüllbar sind.

a) $(a \leftrightarrow ((a \wedge \neg a) \vee a))$

b) $((a \rightarrow b) \rightarrow (\neg a \rightarrow \neg b))$

c) $(((a \rightarrow b) \vee (c \rightarrow a)) \wedge (b \leftrightarrow a))$

d) $(((\neg a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c)) \wedge \neg c)$

S20 - Aussagenlogik: Erfüllbarkeit/Gültigkeit

a) Die Formel ist allgemeingültig:

a	$(a \leftrightarrow ((a \wedge \neg a) \vee a))$
0	1
1	1

S20 - Aussagenlogik: Erfüllbarkeit/Gültigkeit

a) Die Formel ist allgemeingültig:

a	$(a \leftrightarrow ((a \land \neg a) \lor a))$
0	1
1	1

b) Die Formel ist erfüllbar:

a	b	$((a \rightarrow b) \rightarrow (\neg a \rightarrow \neg b))$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

S20 - Aussagenlogik: Erfüllbarkeit/Gültigkeit

a) Die Formel ist allgemeingültig:

a	$(a \leftrightarrow ((a \wedge \neg a) \vee a))$
0	1
1	1

b) Die Formel ist erfüllbar:

a	b	$((a \rightarrow b) \rightarrow (\neg a \rightarrow \neg b))$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

c) Die Formel ist erfüllbar:

a	b	c	$(((a \rightarrow b) \vee (c \rightarrow a)) \wedge (b \leftrightarrow a))$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

S20 - Aussagenlogik: Erfüllbarkeit/Gültigkeit

a) Die Formel ist allgemeingültig:

a	$(a \leftrightarrow ((a \wedge \neg a) \vee a))$
0	1
1	1

b) Die Formel ist erfüllbar:

a	b	$((a \rightarrow b) \rightarrow (\neg a \rightarrow \neg b))$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

c) Die Formel ist erfüllbar:

a	b	c	$(((a \rightarrow b) \vee (c \rightarrow a)) \wedge (b \leftrightarrow a))$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

d) Die Formel ist erfüllbar:

a	b	c	$(((\neg a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c)) \wedge \neg c)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

S21 - Aussagenlogik Resolution

Prüfen Sie mittels Resolution die folgenden Formeln jeweils auf Erfüllbarkeit:

$$a \wedge \Big((c \wedge b) \wedge \big((\neg c \vee \neg b) \vee (a \wedge (c \wedge b))\big)\Big)$$

$$(\neg a \vee \neg b) \wedge (a \vee b) \wedge (\neg a \vee c) \wedge (a \vee \neg c) \wedge (b \vee \neg d) \wedge (\neg b \vee d) \wedge (\neg c \vee d) \wedge (c \vee \neg d)$$

S21 - Aussagenlogik Resolution

Prüfen Sie mittels Resolution die folgenden Formeln jeweils auf Erfüllbarkeit:

$$a \land \Big((c \land b) \land ((\neg c \lor \neg b) \lor (a \land (c \land b)))\Big)$$

$$(\neg a \lor \neg b) \land (a \lor b) \land (\neg a \lor c) \land (a \lor \neg c) \land (b \lor \neg d) \land (\neg b \lor d) \land (\neg c \lor d) \land (c \lor \neg d)$$

Umwandlung in KNF:

$$a \land \Big((c \land b) \land ((\neg c \lor \neg b) \lor (a \land (c \land b)))\Big)$$

S21 - Aussagenlogik Resolution

Prüfen Sie mittels Resolution die folgenden Formeln jeweils auf Erfüllbarkeit:

$$a \wedge \Big((c \wedge b) \wedge ((\neg c \vee \neg b) \vee (a \wedge (c \wedge b)))\Big)$$

$$(\neg a \vee \neg b) \wedge (a \vee b) \wedge (\neg a \vee c) \wedge (a \vee \neg c) \wedge (b \vee \neg d) \wedge (\neg b \vee d) \wedge (\neg c \vee d) \wedge (c \vee \neg d)$$

Umwandlung in KNF:

$$a \wedge \Big((c \wedge b) \wedge ((\neg c \vee \neg b) \vee (a \wedge (c \wedge b)))\Big)$$

$$\equiv a \wedge c \wedge b \wedge \big((\neg c \vee \neg b) \vee (a \wedge c \wedge b)\big)$$

S21 - Aussagenlogik Resolution

Prüfen Sie mittels Resolution die folgenden Formeln jeweils auf Erfüllbarkeit:

$$a \wedge \Big((c \wedge b) \wedge ((\neg c \vee \neg b) \vee (a \wedge (c \wedge b)))\Big)$$

$$(\neg a \vee \neg b) \wedge (a \vee b) \wedge (\neg a \vee c) \wedge (a \vee \neg c) \wedge (b \vee \neg d) \wedge (\neg b \vee d) \wedge (\neg c \vee d) \wedge (c \vee \neg d)$$

Umwandlung in KNF:

$$a \wedge \Big((c \wedge b) \wedge ((\neg c \vee \neg b) \vee (a \wedge (c \wedge b)))\Big)$$

$$\equiv a \wedge c \wedge b \wedge \big((\neg c \vee \neg b) \vee (a \wedge c \wedge b)\big)$$

$$\equiv a \wedge c \wedge b \wedge (\neg c \vee \neg b \vee a) \wedge (\neg c \vee \neg b \vee c) \wedge (\neg c \vee \neg b \vee b)$$

S21 - Aussagenlogik Resolution

Prüfen Sie mittels Resolution die folgenden Formeln jeweils auf Erfüllbarkeit:

$$a \wedge \Big((c \wedge b) \wedge ((\neg c \vee \neg b) \vee (a \wedge (c \wedge b)))\Big)$$

$$(\neg a \vee \neg b) \wedge (a \vee b) \wedge (\neg a \vee c) \wedge (a \vee \neg c) \wedge (b \vee \neg d) \wedge (\neg b \vee d) \wedge (\neg c \vee d) \wedge (c \vee \neg d)$$

Umwandlung in KNF:

$$a \wedge \Big((c \wedge b) \wedge ((\neg c \vee \neg b) \vee (a \wedge (c \wedge b)))\Big)$$

$$\equiv a \wedge c \wedge b \wedge \big((\neg c \vee \neg b) \vee (a \wedge c \wedge b)\big)$$

$$\equiv a \wedge c \wedge b \wedge (\neg c \vee \neg b \vee a) \wedge (\neg c \vee \neg b \vee c) \wedge (\neg c \vee \neg b \vee b)$$

Klauselmenge:

$$M = \big\{\{a\}, \{c\}, \{b\}, \{\neg c, \neg b, a\}, \{\neg c, \neg b, c\}, \{\neg c, \neg b, a\}\big\}$$

S21 - Aussagenlogik Resolution

Damit ergibt sich:

$$\{a\} \tag{1}$$

$$\{c\} \tag{2}$$

$$\{b\} \tag{3}$$

$$\{\neg c, \neg b, a\} \tag{4}$$

$$\{\neg c, \neg b, c\} \tag{5}$$

$$\{\neg c, \neg b, b\} \tag{6}$$

$$\tag{12}$$

S21 - Aussagenlogik Resolution

Damit ergibt sich:

$$\{a\} \tag{1}$$
$$\{c\} \tag{2}$$
$$\{b\} \tag{3}$$
$$\{\neg c, \neg b, a\} \tag{4}$$
$$\{\neg c, \neg b, c\} \tag{5}$$
$$\{\neg c, \neg b, b\} \tag{6}$$
$$\{\neg b, a\} \qquad (2) + (4) \tag{7}$$
$$\tag{12}$$

S21 - Aussagenlogik Resolution

Damit ergibt sich:

$$\{a\} \tag{1}$$
$$\{c\} \tag{2}$$
$$\{b\} \tag{3}$$
$$\{\neg c, \neg b, a\} \tag{4}$$
$$\{\neg c, \neg b, c\} \tag{5}$$
$$\{\neg c, \neg b, b\} \tag{6}$$
$$\{\neg b, a\} \qquad (2) + (4) \tag{7}$$
$$\{\neg b, c\} \qquad (2) + (5) \tag{8}$$

(12)

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
&\{a\} && && (1)\\
&\{c\} && && (2)\\
&\{b\} && && (3)\\
&\{\neg c, \neg b, a\} && && (4)\\
&\{\neg c, \neg b, c\} && && (5)\\
&\{\neg c, \neg b, b\} && && (6)\\
&\{\neg b, a\} && (2) + (4) && (7)\\
&\{\neg b, c\} && (2) + (5) && (8)\\
&\{\neg b, b\} && (2) + (6) && (9)\\
& && && (12)
\end{aligned}$$

S21 - Aussagenlogik Resolution

Damit ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
&\{a\} && && (1)\\
&\{c\} && && (2)\\
&\{b\} && && (3)\\
&\{\neg c, \neg b, a\} && && (4)\\
&\{\neg c, \neg b, c\} && && (5)\\
&\{\neg c, \neg b, b\} && && (6)\\
&\{\neg b, a\} && (2) + (4) && (7)\\
&\{\neg b, c\} && (2) + (5) && (8)\\
&\{\neg b, b\} && (2) + (6) && (9)\\
&\{\neg c, a\} && (3) + (4) && (10)\\
& && && \\
& && && (12)
\end{aligned}
$$

S21 - Aussagenlogik Resolution

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
&\{a\} && && (1)\\
&\{c\} && && (2)\\
&\{b\} && && (3)\\
&\{\neg c, \neg b, a\} && && (4)\\
&\{\neg c, \neg b, c\} && && (5)\\
&\{\neg c, \neg b, b\} && && (6)\\
&\{\neg b, a\} && (2) + (4) && (7)\\
&\{\neg b, c\} && (2) + (5) && (8)\\
&\{\neg b, b\} && (2) + (6) && (9)\\
&\{\neg c, a\} && (3) + (4) && (10)\\
&\{\neg c, c\} && (3) + (5) && (11)\\
& && && (12)
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
&\{a\} && && (1)\\
&\{c\} && && (2)\\
&\{b\} && && (3)\\
&\{\neg c, \neg b, a\} && && (4)\\
&\{\neg c, \neg b, c\} && && (5)\\
&\{\neg c, \neg b, b\} && && (6)\\
&\{\neg b, a\} && (2) + (4) && (7)\\
&\{\neg b, c\} && (2) + (5) && (8)\\
&\{\neg b, b\} && (2) + (6) && (9)\\
&\{\neg c, a\} && (3) + (4) && (10)\\
&\{\neg c, c\} && (3) + (5) && (11)\\
&\{\neg c, b\} && (3) + (6) && (12)
\end{aligned}$$

S21 - Aussagenlogik Resolution

Damit ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
&\{a\} && && (1)\\
&\{c\} && && (2)\\
&\{b\} && && (3)\\
&\{\neg c, \neg b, a\} && && (4)\\
&\{\neg c, \neg b, c\} && && (5)\\
&\{\neg c, \neg b, b\} && && (6)\\
&\{\neg b, a\} && (2)+(4) && (7)\\
&\{\neg b, c\} && (2)+(5) && (8)\\
&\{\neg b, b\} && (2)+(6) && (9)\\
&\{\neg c, a\} && (3)+(4) && (10)\\
&\{\neg c, c\} && (3)+(5) && (11)\\
&\{\neg c, b\} && (3)+(6) && (12)
\end{aligned}
$$

Es gibt keine weiteren Resolventen, die Formel ist also erfüllbar.

S21 - Aussagenlogik Resolution

Die Formel liegt bereits in KNF vor. Damit ergibt sich:

$$\{\neg a, \neg b\} \tag{13}$$
$$\{a, b\} \tag{14}$$
$$\{\neg a, c\} \tag{15}$$
$$\{a, \neg c\} \tag{16}$$
$$\{b, \neg d\} \tag{17}$$
$$\{\neg b, d\} \tag{18}$$
$$\{\neg c, d\} \tag{19}$$
$$\{c, \neg d\} \tag{20}$$

$$\tag{26}$$

S21 - Aussagenlogik Resolution

Die Formel liegt bereits in KNF vor. Damit ergibt sich:

$$\{\neg a, \neg b\} \tag{13}$$

$$\{a, b\} \tag{14}$$

$$\{\neg a, c\} \tag{15}$$

$$\{a, \neg c\} \tag{16}$$

$$\{b, \neg d\} \tag{17}$$

$$\{\neg b, d\} \tag{18}$$

$$\{\neg c, d\} \tag{19}$$

$$\{c, \neg d\} \tag{20}$$

$$\{\neg b, \neg c\} \qquad (13) + (16) \tag{21}$$

$$\tag{26}$$

S21 - Aussagenlogik Resolution

Die Formel liegt bereits in KNF vor. Damit ergibt sich:

$$\{\neg a, \neg b\} \tag{13}$$
$$\{a, b\} \tag{14}$$
$$\{\neg a, c\} \tag{15}$$
$$\{a, \neg c\} \tag{16}$$
$$\{b, \neg d\} \tag{17}$$
$$\{\neg b, d\} \tag{18}$$
$$\{\neg c, d\} \tag{19}$$
$$\{c, \neg d\} \tag{20}$$
$$\{\neg b, \neg c\} \qquad (13) + (16) \tag{21}$$
$$\{\neg b, \neg d\} \qquad (20) + (21) \tag{22}$$

$$\tag{26}$$

S21 - Aussagenlogik Resolution

Die Formel liegt bereits in KNF vor. Damit ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
&\{\neg a, \neg b\} && && (13)\\
&\{a, b\} && && (14)\\
&\{\neg a, c\} && && (15)\\
&\{a, \neg c\} && && (16)\\
&\{b, \neg d\} && && (17)\\
&\{\neg b, d\} && && (18)\\
&\{\neg c, d\} && && (19)\\
&\{c, \neg d\} && && (20)\\
&\{\neg b, \neg c\} && (13) + (16) && (21)\\
&\{\neg b, \neg d\} && (20) + (21) && (22)\\
&\{\neg d\} && (17) + (22) && (23)
\end{aligned}
$$

$$(26)$$

S21 - Aussagenlogik Resolution

Die Formel liegt bereits in KNF vor. Damit ergibt sich:

$$\{\neg a, \neg b\} \tag{13}$$
$$\{a, b\} \tag{14}$$
$$\{\neg a, c\} \tag{15}$$
$$\{a, \neg c\} \tag{16}$$
$$\{b, \neg d\} \tag{17}$$
$$\{\neg b, d\} \tag{18}$$
$$\{\neg c, d\} \tag{19}$$
$$\{c, \neg d\} \tag{20}$$
$$\{\neg b, \neg c\} \qquad (13) + (16) \tag{21}$$
$$\{\neg b, \neg d\} \qquad (20) + (21) \tag{22}$$
$$\{\neg d\} \qquad (17) + (22) \tag{23}$$
$$\{c\} \qquad (19) + (23) \tag{24}$$

$$\tag{26}$$

S21 - Aussagenlogik Resolution

Die Formel liegt bereits in KNF vor. Damit ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
&\{\neg a, \neg b\} && && (13)\\
&\{a, b\} && && (14)\\
&\{\neg a, c\} && && (15)\\
&\{a, \neg c\} && && (16)\\
&\{b, \neg d\} && && (17)\\
&\{\neg b, d\} && && (18)\\
&\{\neg c, d\} && && (19)\\
&\{c, \neg d\} && && (20)\\
&\{\neg b, \neg c\} && (13) + (16) && (21)\\
&\{\neg b, \neg d\} && (20) + (21) && (22)\\
&\{\neg d\} && (17) + (22) && (23)\\
&\{c\} && (19) + (23) && (24)\\
&\{d\} && (19) + (24) && (25)\\
& && && (26)
\end{aligned}
$$

S21 - Aussagenlogik Resolution

Die Formel liegt bereits in KNF vor. Damit ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
&\{\neg a, \neg b\} && && (13)\\
&\{a, b\} && && (14)\\
&\{\neg a, c\} && && (15)\\
&\{a, \neg c\} && && (16)\\
&\{b, \neg d\} && && (17)\\
&\{\neg b, d\} && && (18)\\
&\{\neg c, d\} && && (19)\\
&\{c, \neg d\} && && (20)\\
&\{\neg b, \neg c\} && (13) + (16) && (21)\\
&\{\neg b, \neg d\} && (20) + (21) && (22)\\
&\{\neg d\} && (17) + (22) && (23)\\
&\{c\} && (19) + (23) && (24)\\
&\{d\} && (19) + (24) && (25)\\
&\varnothing && (23) + (25) && (26)
\end{aligned}
$$

S21 - Aussagenlogik Resolution

Die Formel liegt bereits in KNF vor. Damit ergibt sich:

$$\{\neg a, \neg b\} \tag{13}$$
$$\{a, b\} \tag{14}$$
$$\{\neg a, c\} \tag{15}$$
$$\{a, \neg c\} \tag{16}$$
$$\{b, \neg d\} \tag{17}$$
$$\{\neg b, d\} \tag{18}$$
$$\{\neg c, d\} \tag{19}$$
$$\{c, \neg d\} \tag{20}$$
$$\{\neg b, \neg c\} \qquad (13) + (16) \tag{21}$$
$$\{\neg b, \neg d\} \qquad (20) + (21) \tag{22}$$
$$\{\neg d\} \qquad (17) + (22) \tag{23}$$
$$\{c\} \qquad (19) + (23) \tag{24}$$
$$\{d\} \qquad (19) + (24) \tag{25}$$
$$\varnothing \qquad (23) + (25) \tag{26}$$

Die Formel ist also unerfüllbar.