Theoretische Informatik und Logik

1. Repetitorium

Sommersemester 2018

Aufgabe B

Zeigen Sie: Wenn es möglich ist, für zwei beliebige Turing-Maschinen zu entscheiden, ob sie dieselbe Sprache akzeptieren, so ist es auch möglich, für beliebige Turing-Maschinen zu entscheiden, ob sie die leere Sprache akzeptieren.

Aufgabe C

Zeigen Sie, dass $\{1\}^*$ unentscheidbare Teilmengen besitzt.

Aufgabe D

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Jedes LOOP-Programm terminiert.

b) Zu jedem WHILE-Programm gibt es ein äquivalentes LOOP-Programm.

c) Die Anzahl der Ausführungen von P in der LOOP-Schleife

$$\texttt{LOOP}\ x_i\ \texttt{DO}\ P\ \texttt{END}$$

kann beeinflusst werden, indem x_i in P entsprechend modifiziert wird.

d) Die Ackermannfunktion ist total und damit LOOP-berechenbar.

Aufgabe E

Geben Sie eine Turing-Maschine $\mathcal{A}_{\mathsf{mod2}}$ an, die die Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = (x \bmod 2)$ berechnet. Stellen Sie dabei die Zahlen in unärer Kodierung dar.

Aufgabe F

Es sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = \lfloor \log_{10}(x) \rfloor$. Geben Sie ein WHILE-Programm an, welches f berechnet.

Aufgabe G

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Die Menge der Instanzen des Postschen Korrespondenzproblems, welche eine Lösung haben, ist semi-entscheidbar.

b) Das Postsche Korrespondenzproblem ist bereits über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ nicht entscheidbar.

c) Es ist entscheidbar, ob eine Turingmaschine nur Wörter akzeptiert, die Palindrome sind. (Ein Palindrom ist ein Wort $w = a_1 \dots a_n$ mit $a_1 \dots a_n = a_n \dots a_1$.)

d) $\mathbf{P}_{\mathsf{halt}}$ ist semi-entscheidbar.

e) Es ist nicht entscheidbar, ob die von einer deterministischen Turing-Maschine berechnete Funktion total ist.

f) Es gibt reguläre Sprachen, die nicht semi-entscheidbar sind.

Aufgabe H

Sei $\mathbf{L}$ eine unentscheidbare Sprache. Zeigen Sie:

a) $\mathbf{L}$ hat eine Teilmenge $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{L}$, die entscheidbar ist.

b) $\mathbf{L}$ hat eine Obermenge $\mathbf{O} \supseteq \mathbf{L}$, die entscheidbar ist.

c) Es gibt jeweils nicht nur eine sondern unendlich viele entscheidbare Teilmengen bzw. Obermengen wie in (a) und (b).

Aufgabe I

a) Beschreiben Sie mit eigenen Worten die Probleme, die in P liegen.

b) Beschreiben Sie mit eigenen Worten die Probleme, die in NP liegen.

c) Beschreiben Sie mit eigenen Worten die Probleme, die in PSPACE liegen.

d) Erläutern Sie, warum P $\subseteq$ NP $\subseteq$ PSPACE gilt.

e) Beschreiben Sie für $\mathcal{C}$ = NP und $\mathcal{C}$ = PSPACE, wann ein Problem „$\mathcal{C}$-hart“ bzw. „$\mathcal{C}$-vollständig“ ist.

Aufgabe J

Zeigen Sie, dass NP unter Kleene-Stern abgeschlossen ist.

Aufgabe K

Wir betrachten das folgende Problem K: Gegeben sind zwei gerichtete Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ sowie eine Zahl $k \in \mathbb{N}$. Gefragt ist, ob es Teilmengen $V_1' \subseteq V_1$ und $V_2' \subseteq V_2$ gibt, so dass $|V_1'| = |V_2'| = k$ ist und es eine Bijektion $f\colon V_1' \to V_2'$ gibt, so dass gilt

$$(u, v) \in E_1 \iff (f(u), f(v)) \in E_2.$$

a) Zeigen Sie $K \in$ NP.

b) Zeigen Sie, dass K ein NP-hartes Problem ist. Zeigen Sie dafür, dass das Problem CLIQUE auf K in polynomieller Zeit reduzierbar ist.

Aufgabe L

Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) Ist $\mathbf{L}_2 \in$ PSPACE und gilt $\mathbf{L}_1 \leq_p \mathbf{L}_2$, so ist auch $\mathbf{L}_1 \in$ PSPACE.

b) Ist $\mathbf{L}_1$ ein PSPACE-hartes Problem, und gilt $\mathbf{L}_1 \leq_p \mathbf{L}_2$, dann ist auch $\mathbf{L}_2$ ein PSPACE-hartes Problem.