



Formale Systeme

1. Übungsblatt

Wintersemester 2017/18

Aufgabe zur Selbstkontrolle (diese werden in den Übungen nicht besprochen)

S1) Es sei $\Sigma_1 = \{a, b, c\}$ und $\Sigma_2 = \{0, 1\}$. Beschreiben Sie folgende Mengen verbal oder durch Aufzählung:

$$\Sigma_1^*, \Sigma_1^+, \Sigma_1^2, \Sigma_1 \circ (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)^*, \mathcal{P}(\Sigma_1), \mathcal{P}(\Sigma_1^*)$$

S2) Beschreiben Sie folgende Mengen, die über die Operationen Vereinigung, Konkatenation und Kleene-Stern gebildet werden, verbal oder durch Aufzählung:

$$\begin{aligned} &\{a\} \cup \{b\} \cup \{c\}, \{a\} \circ \{b\} \circ \{c\}, \{a\} \cup \{b\} \circ \{a\} \cup \{b\}, \{a\}^*, (\{a\} \cup \{b\} \cup \{c\})^*, \\ &(\{a\} \circ \{b\} \circ \{c\})^*, \{a\} \cup \{a\}^* \circ \{b\}, (\{0\} \cup \{1\})^*, (\{1\} \cup \{1\} \circ \{0\})^*, \\ &(\{0\} \cup \{1\})^* \circ \{0\} \circ \{0\} \circ (\{0\} \cup \{1\})^* \end{aligned}$$

Aufgabe 1

Gegeben sind ein beliebiges Alphabet Σ und die Sprachen $L_1, L_2, L_3, L_4 \subseteq \Sigma^*$. Zeigen Sie, dass die Operationen \cup , \circ und $*$ monoton sind, d.h. für $L_1 \subseteq L_3$ und $L_2 \subseteq L_4$ gilt:

- $L_1 \cup L_2 \subseteq L_3 \cup L_4$
- $L_1 \circ L_2 \subseteq L_3 \circ L_4$
- $L_1^* \subseteq L_3^*$

Aufgabe 2

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Identitäten. Dabei sind L, L_1, L_2, L_3 beliebige Sprachen.

- $L_1 \circ (L_2 \cup L_3) = L_1 \circ L_2 \cup L_1 \circ L_3$
- $(\{a\} \circ \{b\} \cup \{a\})^* \circ \{a\} = \{a\} \circ (\{b\} \circ \{a\} \cup \{a\})^*$
- $(\{a\} \cup \{b\})^* = \{a\}^* \cup \{b\}^*$
- $\emptyset^* = \{\varepsilon\}, (\{\varepsilon\} \cup L)^* = L^*, (L^*)^* = L^*$
- $(L_1^* \cup L_2^*)^* = (L_1 \cup L_2)^*$
- $L \circ L^* = L^+, L^* \circ L^* = L^*, L^* \cup L = L^*$

Aufgabe 3

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Untersuchen Sie die folgenden Tupel daraufhin, ob sie eine Grammatik definieren. Wenn das der Fall ist, geben Sie jeweils den maximalen Chomsky-Typ der Grammatik an und begründen Sie die Einordnung.

- $G_1 = \langle V_1, \Sigma, P_1, S_1 \rangle$ mit $V_1 = \{S, A\}$ und $P_1 = \{\varepsilon \rightarrow b, S \rightarrow Ab\}$
- $G_2 = \langle V_2, \Sigma, P_2, S_2 \rangle$ mit $V_2 = \{S\}$ und $P_2 = \{S \rightarrow aSb, S \rightarrow \varepsilon\}$
- $G_3 = \langle V_3, \Sigma, P_3, S_3 \rangle$ mit $V_3 = \{S, X, Y\}$ und $P_3 = \{XY \rightarrow Y, S \rightarrow aYb, S \rightarrow XY, Y \rightarrow a\}$
- $G_4 = \langle V_4, \Sigma, P_4, S_4 \rangle$ mit $V_4 = \{S, X, Y\}$ und $P_4 = \{S \rightarrow aY, X \rightarrow a, Y \rightarrow bS, Y \rightarrow b, Y \rightarrow bX\}$
- $G_5 = \langle V_5, \Sigma, P_5, S_5 \rangle$ mit $V_5 = \{S, X, Y, Z\}$ und $P_5 = \{X \rightarrow b, Y \rightarrow aYYb, aY \rightarrow aZ, ZY \rightarrow ZX, S \rightarrow Y, Z \rightarrow a\}$
- $G_6 = \langle V_6, \Sigma, P_6, S_6 \rangle$ mit $V_6 = \{S, W, X, Y, Z\}$ und $P_6 = \{X \rightarrow b, Y \rightarrow aYYb, aY \rightarrow aZ, ZY \rightarrow ZX, S \rightarrow Y, S \rightarrow \varepsilon, Z \rightarrow a, W \rightarrow S\}$

Aufgabe 4

Gegeben ist die Grammatik $G = \langle V, \Sigma, P, S \rangle$ mit $V = \{S, B\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$ und $P = \{S \rightarrow aSbc, S \rightarrow abc, cB \rightarrow B, cB \rightarrow Bc, bB \rightarrow bb\}$.

- Von welchem maximalen Typ ist G ? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Bestimmen Sie drei Wörter w der Sprache $L(G)$. Begründen Sie Ihre Antwort.
- Gilt $\varepsilon \in L(G)$? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Beschreiben Sie die durch G erzeugte Sprache $L(G)$.

Aufgabe 5

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Gegeben sind die Grammatiken G_k mit $1 \leq k \leq 4$:

- $G_1 = \langle V_1, \Sigma, P_1, S_1 \rangle$ mit $V_1 = \{S, T\}$ und
 $P = \{S \rightarrow aT, S \rightarrow \varepsilon, T \rightarrow Sb\}$
- $G_2 = \langle V_2, \Sigma, P_2, S_2 \rangle$ mit $V_2 = \{S, A, B\}$ und
 $P_2 = \{S \rightarrow SAS, S \rightarrow SBBS, S \rightarrow \varepsilon, A \rightarrow a, B \rightarrow b\}$
- $G_3 = \langle V_3, \Sigma, P_3, S_3 \rangle$ mit $V_3 = \{S, A, B\}$ und
 $P_3 = \{S \rightarrow A, S \rightarrow \varepsilon, A \rightarrow ab, A \rightarrow aBb, aB \rightarrow aaBb, aB \rightarrow a\}$
- $G_4 = \langle V_4, \Sigma, P_4, S_4 \rangle$ mit $V_4 = \{S, T\}$ und
 $P_4 = \{S \rightarrow aSb, S \rightarrow aTb, S \rightarrow \varepsilon, aTb \rightarrow T, aTb \rightarrow S\}$.

- a) Geben Sie zu jeder dieser Grammatiken G_k das maximale i an, so dass G_k eine Grammatik vom Typ i ist.
- b) Beschreiben Sie $L(G_k)$ in einer geeigneten Form, z.B. mittels einer Mengennotation.