Uniform and Modular Sequent Systems for Description Logics

Jonas Karge and Tim Lyon

Computational Logic Group, Institute of Artificial Intelligence,

Technische Universität Dresden

DL Workshop 2022

Introduction

Sequents generally:

- Pairs of (multi)sets of logical formulae $\Sigma \vdash \Pi$;
- can be used to write decision algorithms.

For Description Logics reasoning tasks:

- checking if a KB $\mathcal{K}$ implies a formula X is equivalent to checking if the sequent $\mathcal{K} \vdash X$ has a proof;
- replace X by $\bot$ to check consistency (and various other reasoning tasks).

Desirable Characteristics of our Sequent Calculi:

- *uniform*: covering many DLs;
- *modular*: transform sequent system for one DL into sequent system for another DL by addition or deletion of inference rules.

A Sequent System for $\mathcal{ALC}$

- For $\mathcal{ALC}$, a sequent is a formula of the form $\Lambda := \mathcal{R}, \Sigma \vdash \Pi, \mathcal{Q}$,
- Σ and Π are multisets of formulae of the form $a : P$, called *internal formulae (IFs)*, and P is a complex concept generated via the following grammar:

$$P ::= C \mid \bot \mid \top \mid \neg P \mid P \sqcup P \mid P \sqcap P \mid \exists r.P \mid \forall r.P$$

- $\mathcal{R}$ and $\mathcal{Q}$ consist of multisets of formulae generated via the following grammar, and are referred to as *external formulae (EFs)*.

$$F ::= P \sqsubseteq Q \mid r(a, b)$$

G3$\mathcal{ALC}$

$$\frac{}{\mathcal{R}, \Sigma, a : C \vdash a : C, \Pi, \mathcal{Q}} \; (id_{\mathbf{C}}) \qquad \frac{}{\mathcal{R}, \Sigma, F \vdash F, \Pi, \mathcal{Q}} \; (id_{\mathbf{R}})$$

$$\frac{}{\mathcal{R}, \Sigma, a : \bot \vdash \Pi, \mathcal{Q}} \; (\bot_l) \qquad \frac{\mathcal{R}, \Sigma \vdash a : \bot, \Pi, \mathcal{Q}}{\mathcal{R}, \Sigma \vdash \Pi, \mathcal{Q}} \; (\bot_r) \qquad \frac{\mathcal{R}, \Sigma, a : \top \vdash \Pi, \mathcal{Q}}{\mathcal{R}, \Sigma \vdash \Pi, \mathcal{Q}} \; (\top_l)$$

$$\frac{}{\mathcal{R}, \Sigma \vdash a : \top, \Pi, \mathcal{Q}} \; (\top_r) \qquad \frac{\mathcal{R}, \Sigma \vdash a : P, \Pi, \mathcal{Q}}{\mathcal{R}, \Sigma, a : \neg P \vdash \Pi, \mathcal{Q}} \; (\neg_l) \qquad \frac{\mathcal{R}, \Sigma, a : P \vdash \Pi, \mathcal{Q}}{\mathcal{R}, \Sigma \vdash a : \neg P, \Pi, \mathcal{Q}} \; (\neg_r)$$

$$\frac{\mathcal{R}, \Sigma, a : P \vdash \Pi, \mathcal{Q} \qquad \mathcal{R}, \Sigma, a : Q \vdash \Pi, \mathcal{Q}}{\mathcal{R}, \Sigma, a : P \sqcup Q \vdash \Pi, \mathcal{Q}} \; (\sqcup_l) \qquad \frac{\mathcal{R}, \Sigma \vdash a : P, a : Q, \Pi, \mathcal{Q}}{\mathcal{R}, \Sigma \vdash a : P \sqcup Q, \Pi, \mathcal{Q}} \; (\sqcup_r)$$

$$\frac{\mathcal{R}, \Sigma, a : P, a : Q \vdash \Pi, \mathcal{Q}}{\mathcal{R}, \Sigma, a : P \sqcap Q \vdash \Pi, \mathcal{Q}} \; (\sqcap_l) \qquad \frac{\mathcal{R}, \Sigma \vdash a : P, \Pi, \mathcal{Q} \qquad \mathcal{R}, \Sigma \vdash a : Q, \Pi, \mathcal{Q}}{\mathcal{R}, \Sigma \vdash a : P \sqcap Q, \Pi, \mathcal{Q}} \; (\sqcap_r)$$

$$\frac{\mathcal{R}, P \sqsubseteq Q, a : P, a : Q, \Sigma \vdash \Pi, \mathcal{Q}}{\mathcal{R}, P \sqsubseteq Q, a : P, \Sigma \vdash \Pi, \mathcal{Q}} \; (\sqsubseteq_l) \qquad \frac{\mathcal{R}, \Sigma, b : P \vdash b : Q, \Pi, \mathcal{Q}}{\mathcal{R}, \Sigma \vdash P \sqsubseteq Q, \Pi, \mathcal{Q}} \; (\sqsubseteq_r^{\dagger})$$

$$\frac{\mathcal{R}, \Sigma, r(a,b), b : P \vdash \Pi, \mathcal{Q}}{\mathcal{R}, \Sigma, a : \exists r.P \vdash \Pi, \mathcal{Q}} \; (\exists_l)^{\dagger} \qquad \frac{\mathcal{R}, \Sigma, r(a,b) \vdash a : \exists r.P, b : P, \Pi, \mathcal{Q}}{\mathcal{R}, \Sigma, r(a,b) \vdash a : \exists r.P, \Pi, \mathcal{Q}} \; (\exists_r)$$

$$\frac{\mathcal{R}, \Sigma, r(a,b), a : \forall r.P, b : P \vdash \Pi, \mathcal{Q}}{\mathcal{R}, \Sigma, r(a,b), a : \forall r.P \vdash \Pi, \mathcal{Q}} \; (\forall_l) \qquad \frac{\mathcal{R}, \Sigma, r(a,b) \vdash b : P, \Pi, \mathcal{Q}}{\mathcal{R}, \Sigma \vdash a : \forall r.P, \Pi, \mathcal{Q}} \; (\forall_r)^{\dagger}$$

Example

Domain	ABox	TBox
Thor	Thor : Deity	$\text{Deity} \sqsubseteq \neg\text{Mortal}$
Odin	hasFather(Thor, Odin)	$\text{Man} \sqsubseteq \text{Mortal}$

From this KB, derive the fact that Thor is not a man.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\text{De} \sqsubseteq \neg\text{Mo}, \text{Ma} \sqsubseteq \text{Mo}, \text{hF}(\text{T}, \text{O}), \text{T} : \text{De}, \text{T} : \text{Ma}, \text{T} : \text{Mo} \vdash \text{T} : \text{Mo}}\;(id_{\mathbf{C}})}{\text{De} \sqsubseteq \neg\text{Mo}, \text{Ma} \sqsubseteq \text{Mo}, \text{hF}(\text{T}, \text{O}), \text{T} : \text{De}, \text{T} : \text{Ma} \vdash \text{T} : \text{Mo}}\;(\sqsubseteq_l)}{\text{De} \sqsubseteq \neg\text{Mo}, \text{Ma} \sqsubseteq \text{Mo}, \text{hF}(\text{T}, \text{O}), \text{T} : \text{De} \vdash \text{T} : \text{Mo}, \text{T} : \neg\text{Ma}}\;(\neg_r)}{\text{De} \sqsubseteq \neg\text{Mo}, \text{Ma} \sqsubseteq \text{Mo}, \text{hF}(\text{T}, \text{O}), \text{T} : \text{De}, \text{T} : \neg\text{Mo} \vdash \text{T} : \neg\text{Ma}}\;(\neg_l)}{\text{De} \sqsubseteq \neg\text{Mo}, \text{Ma} \sqsubseteq \text{Mo}, \text{hF}(\text{T}, \text{O}), \text{T} : \text{De} \vdash \text{T} : \neg\text{Ma}}\;(\sqsubseteq_l)$$

Example

Domain	ABox	TBox
Thor	Thor : Deity	Deity $\sqsubseteq \neg$Mortal
Odin	hasFather(Thor, Odin)	Man $\sqsubseteq$ Mortal

From this KB, derive the fact that Thor is not a man.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\mathsf{De} \sqsubseteq \neg\mathsf{Mo}, \mathsf{Ma} \sqsubseteq \mathsf{Mo}, \mathsf{hF}(\mathsf{T},\mathsf{O}), \mathsf{T} : \mathsf{De}, \mathsf{T} : \mathsf{Ma}, \mathsf{T} : \mathsf{Mo} \vdash \mathsf{T} : \mathsf{Mo}}(id_{\mathbf{C}})}{\mathsf{De} \sqsubseteq \neg\mathsf{Mo}, \mathsf{Ma} \sqsubseteq \mathsf{Mo}, \mathsf{hF}(\mathsf{T},\mathsf{O}), \mathsf{T} : \mathsf{De}, \mathsf{T} : \mathsf{Ma} \vdash \mathsf{T} : \mathsf{Mo}}(\sqsubseteq_l)}{\mathsf{De} \sqsubseteq \neg\mathsf{Mo}, \mathsf{Ma} \sqsubseteq \mathsf{Mo}, \mathsf{hF}(\mathsf{T},\mathsf{O}), \mathsf{T} : \mathsf{De} \vdash \mathsf{T} : \mathsf{Mo}, \mathsf{T} : \neg\mathsf{Ma}}(\neg_r)}{\mathsf{De} \sqsubseteq \neg\mathsf{Mo}, \mathsf{Ma} \sqsubseteq \mathsf{Mo}, \mathsf{hF}(\mathsf{T},\mathsf{O}), \mathsf{T} : \mathsf{De}, \mathsf{T} : \neg\mathsf{Mo} \vdash \mathsf{T} : \neg\mathsf{Ma}}(\neg_l)}{\mathsf{De} \sqsubseteq \neg\mathsf{Mo}, \mathsf{Ma} \sqsubseteq \mathsf{Mo}, \mathsf{hF}(\mathsf{T},\mathsf{O}), \mathsf{T} : \mathsf{De} \vdash \mathsf{T} : \neg\mathsf{Ma}}(\sqsubseteq_l)
$$

Rule Applied: $$\dfrac{\mathcal{R}, P \sqsubseteq Q, a : P, a : Q, \Sigma \vdash \Pi, \mathcal{Q}}{\mathcal{R}, P \sqsubseteq Q, a : P, \Sigma \vdash \Pi, \mathcal{Q}} (\sqsubseteq_l)$$

Example

Domain	ABox	TBox
Thor	Thor : Deity	Deity $\sqsubseteq \neg$Mortal
Odin	hasFather(Thor, Odin)	Man $\sqsubseteq$ Mortal

From this KB, derive the fact that Thor is not a man.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\mathsf{De} \sqsubseteq \neg\mathsf{Mo}, \mathsf{Ma} \sqsubseteq \mathsf{Mo}, \mathsf{hF}(\mathsf{T},\mathsf{O}), \mathsf{T} : \mathsf{De}, \mathsf{T} : \mathsf{Ma}, \mathsf{T} : \mathsf{Mo} \vdash \mathsf{T} : \mathsf{Mo}}\,(id_{\mathbf{C}})}{\mathsf{De} \sqsubseteq \neg\mathsf{Mo}, \mathsf{Ma} \sqsubseteq \mathsf{Mo}, \mathsf{hF}(\mathsf{T},\mathsf{O}), \mathsf{T} : \mathsf{De}, \mathsf{T} : \mathsf{Ma} \vdash \mathsf{T} : \mathsf{Mo}}\,(\sqsubseteq_l)}{\mathsf{De} \sqsubseteq \neg\mathsf{Mo}, \mathsf{Ma} \sqsubseteq \mathsf{Mo}, \mathsf{hF}(\mathsf{T},\mathsf{O}), \mathsf{T} : \mathsf{De} \vdash \mathsf{T} : \mathsf{Mo}, \mathsf{T} : \neg\mathsf{Ma}}\,(\neg_r)}{\mathsf{De} \sqsubseteq \neg\mathsf{Mo}, \mathsf{Ma} \sqsubseteq \mathsf{Mo}, \mathsf{hF}(\mathsf{T},\mathsf{O}), \mathsf{T} : \mathsf{De}, \mathsf{T} : \neg\mathsf{Mo} \vdash \mathsf{T} : \neg\mathsf{Ma}}\,(\neg_l)}{\mathsf{De} \sqsubseteq \neg\mathsf{Mo}, \mathsf{Ma} \sqsubseteq \mathsf{Mo}, \mathsf{hF}(\mathsf{T},\mathsf{O}), \mathsf{T} : \mathsf{De} \vdash \mathsf{T} : \neg\mathsf{Ma}}\,(\sqsubseteq_l)$$

Rule Applied:

$$\dfrac{\mathcal{R}, \Sigma \vdash a : P, \Pi, \mathcal{Q}}{\mathcal{R}, \Sigma, a : \neg P \vdash \Pi, \mathcal{Q}}\,(\neg_l)$$

Example

Domain	ABox	TBox
Thor	Thor : Deity	Deity $\sqsubseteq \neg$Mortal
Odin	hasFather(Thor, Odin)	Man $\sqsubseteq$ Mortal

From this KB, derive the fact that Thor is not a man.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\text{De} \sqsubseteq \neg\text{Mo}, \text{Ma} \sqsubseteq \text{Mo}, \text{hF}(\text{T},\text{O}), \text{T} : \text{De}, \text{T} : \text{Ma}, \text{T} : \text{Mo} \vdash \text{T} : \text{Mo}}\ (id_{\mathbf{C}})}{\text{De} \sqsubseteq \neg\text{Mo}, \text{Ma} \sqsubseteq \text{Mo}, \text{hF}(\text{T},\text{O}), \text{T} : \text{De}, \text{T} : \text{Ma} \vdash \text{T} : \text{Mo}}\ (\sqsubseteq_l)}{\text{De} \sqsubseteq \neg\text{Mo}, \text{Ma} \sqsubseteq \text{Mo}, \text{hF}(\text{T},\text{O}), \text{T} : \text{De} \vdash \text{T} : \text{Mo}, \text{T} : \neg\text{Ma}}\ (\neg_r)}{\text{De} \sqsubseteq \neg\text{Mo}, \text{Ma} \sqsubseteq \text{Mo}, \text{hF}(\text{T},\text{O}), \text{T} : \text{De}, \text{T} : \neg\text{Mo} \vdash \text{T} : \neg\text{Ma}}\ (\neg_l)}{\text{De} \sqsubseteq \neg\text{Mo}, \text{Ma} \sqsubseteq \text{Mo}, \text{hF}(\text{T},\text{O}), \text{T} : \text{De} \vdash \text{T} : \neg\text{Ma}}\ (\sqsubseteq_l)$$

Rule Applied:

$$\dfrac{\mathcal{R}, \Sigma, a : P \vdash \Pi, Q}{\mathcal{R}, \Sigma \vdash a : \neg P, \Pi, Q}\ (\neg_r)$$

Example

Domain	ABox	TBox
Thor	Thor : Deity	Deity $\sqsubseteq \neg$Mortal
Odin	hasFather(Thor, Odin)	Man $\sqsubseteq$ Mortal

From this KB, derive the fact that Thor is not a man.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\mathsf{De} \sqsubseteq \neg\mathsf{Mo}, \mathsf{Ma} \sqsubseteq \mathsf{Mo}, \mathsf{hF}(\mathsf{T},\mathsf{O}), \mathsf{T} : \mathsf{De}, \mathsf{T} : \mathsf{Ma}, {\color{red}\mathsf{T} : \mathsf{Mo}} \vdash \mathsf{T} : \mathsf{Mo}}(id_{\mathbf{C}})}{\mathsf{De} \sqsubseteq \neg\mathsf{Mo}, \mathsf{Ma} \sqsubseteq \mathsf{Mo}, \mathsf{hF}(\mathsf{T},\mathsf{O}), \mathsf{T} : \mathsf{De}, \mathsf{T} : \mathsf{Ma} \vdash \mathsf{T} : \mathsf{Mo}}{\color{red}(\sqsubseteq_l)}}{\mathsf{De} \sqsubseteq \neg\mathsf{Mo}, \mathsf{Ma} \sqsubseteq \mathsf{Mo}, \mathsf{hF}(\mathsf{T},\mathsf{O}), \mathsf{T} : \mathsf{De} \vdash \mathsf{T} : \mathsf{Mo}, \mathsf{T} : \neg\mathsf{Ma}}(\neg_r)}{\mathsf{De} \sqsubseteq \neg\mathsf{Mo}, \mathsf{Ma} \sqsubseteq \mathsf{Mo}, \mathsf{hF}(\mathsf{T},\mathsf{O}), \mathsf{T} : \mathsf{De}, \mathsf{T} : \neg\mathsf{Mo} \vdash \mathsf{T} : \neg\mathsf{Ma}}(\neg_l)}{\mathsf{De} \sqsubseteq \neg\mathsf{Mo}, \mathsf{Ma} \sqsubseteq \mathsf{Mo}, \mathsf{hF}(\mathsf{T},\mathsf{O}), \mathsf{T} : \mathsf{De} \vdash \mathsf{T} : \neg\mathsf{Ma}}(\sqsubseteq_l)$$

Rule Applied: $$\dfrac{\mathcal{R}, P \sqsubseteq Q, a : P, a : Q, \Sigma \vdash \Pi, \mathcal{Q}}{\mathcal{R}, P \sqsubseteq Q, a : P, \Sigma \vdash \Pi, \mathcal{Q}}(\sqsubseteq_l)$$

Example

Domain	ABox	TBox
Thor	Thor : Deity	Deity $\sqsubseteq \neg$Mortal
Odin	hasFather(Thor, Odin)	Man $\sqsubseteq$ Mortal

From this KB, derive the fact that Thor is not a man.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\mathsf{De} \sqsubseteq \neg\mathsf{Mo}, \mathsf{Ma} \sqsubseteq \mathsf{Mo}, \mathsf{hF}(\mathsf{T},\mathsf{O}), \mathsf{T} : \mathsf{De}, \mathsf{T} : \mathsf{Ma}, \mathsf{T} : \mathsf{Mo} \vdash \mathsf{T} : \mathsf{Mo}}(id_{\mathbf{C}})}{\mathsf{De} \sqsubseteq \neg\mathsf{Mo}, \mathsf{Ma} \sqsubseteq \mathsf{Mo}, \mathsf{hF}(\mathsf{T},\mathsf{O}), \mathsf{T} : \mathsf{De}, \mathsf{T} : \mathsf{Ma} \vdash \mathsf{T} : \mathsf{Mo}}(\sqsubseteq_l)}{\mathsf{De} \sqsubseteq \neg\mathsf{Mo}, \mathsf{Ma} \sqsubseteq \mathsf{Mo}, \mathsf{hF}(\mathsf{T},\mathsf{O}), \mathsf{T} : \mathsf{De} \vdash \mathsf{T} : \mathsf{Mo}, \mathsf{T} : \neg\mathsf{Ma}}(\neg_r)}{\mathsf{De} \sqsubseteq \neg\mathsf{Mo}, \mathsf{Ma} \sqsubseteq \mathsf{Mo}, \mathsf{hF}(\mathsf{T},\mathsf{O}), \mathsf{T} : \mathsf{De}, \mathsf{T} : \neg\mathsf{Mo} \vdash \mathsf{T} : \neg\mathsf{Ma}}(\neg_l)}{\mathsf{De} \sqsubseteq \neg\mathsf{Mo}, \mathsf{Ma} \sqsubseteq \mathsf{Mo}, \mathsf{hF}(\mathsf{T},\mathsf{O}), \mathsf{T} : \mathsf{De} \vdash \mathsf{T} : \neg\mathsf{Ma}}(\sqsubseteq_l)$$

Rule Applied: $\dfrac{}{\mathcal{R}, \Sigma, a : C \vdash a : C, \Pi, \mathcal{Q}}(id_{\mathbf{C}})$

Extensions of $\mathcal{ALC}$: $\mathcal{S}$

To include transitive roles, we can either

- include *transitivity axioms* of the form $\mathsf{Trans}(r)$
- or axioms of the form $r \circ r \sqsubseteq r$.

$\Rightarrow$ Focus on transitivity axioms for now.

Descriptive Definitional Rules

Definition (Descriptive Definition)

A *descriptive definition* is a formula of the form:

$$\mathrm{Rel}(r_1, \ldots, r_l) \leftrightarrow \forall \vec{a}(F_1 \wedge \cdots \wedge F_n \rightarrow G_1 \vee \cdots \vee G_k)$$

The following formula defines the RRA $Trans(r)$ for the role r:

$$Trans(r) \leftrightarrow \forall a \forall b \forall c (r(a,b) \wedge r(b,c) \rightarrow r(a,c))$$

Descriptive Definitional Rules

Descriptive definitions can be transformed into left and right introduction rules:

$$\frac{\left\{\mathcal{R}, \mathrm{Rel}(r_1, \ldots, r_l), \overline{F}, G_j, \Sigma \vdash \Pi, \mathcal{Q} \mid 1 \leq j \leq k\right\}}{\mathcal{R}, \mathrm{Rel}(r_1, \ldots, r_l), \overline{F}, \Sigma \vdash \Pi, \mathcal{Q}} \; (\mathrm{Rel}_l)$$

$$\frac{\mathcal{R}, \overline{F}, \Sigma \vdash \Pi, \overline{G}, \mathcal{Q}}{\mathcal{R}, \Sigma \vdash \Pi, \mathrm{Rel}(r_1, \ldots, r_l), \mathcal{Q}} \; (\mathrm{Rel}_r)^{\dagger}$$

For the RRA *Trans*(r), we receive:

$$\frac{\mathcal{R}, \mathrm{Trans}(r), r(a,b), r(b,c), r(a,c), \Sigma \vdash \Pi, \mathcal{Q}}{\mathcal{R}, \mathrm{Trans}(r), r(a,b), r(b,c), \Sigma \vdash \Pi, \mathcal{Q}} \; (\mathrm{Trans}(r)_l)$$

$$\frac{\mathcal{R}, r(a,b), r(b,c), \Sigma \vdash \Pi, r(a,c), \mathcal{Q}}{\mathcal{R}, \Sigma \vdash \mathrm{Trans}(r), \Pi, \mathcal{Q}} \; (\mathrm{Trans}(r)_r)^{\dagger}$$

Results

Main Result:

Theorem

$\mathcal{R}, \Sigma \vdash \Pi, \mathcal{Q}$ *is derivable in* G3$\mathcal{ALC}^*$ *iff* $\models \mathcal{R}, \Sigma \vdash \Pi, \mathcal{Q}$.

Further Results:

Each calculus G3$\mathcal{ALC}^*$ possesses the following properties:

(i) For all EFs and IFs X, $\mathcal{R}, X, \Sigma \vdash \Pi, X, \mathcal{Q}$ is derivable in G3$\mathcal{ALC}^*$.

(ii) All rules of G3$\mathcal{ALC}^*$ are hp-invertible.

(iii) The (sub), (wk_l), (wk_r), (ctr_l), and (ctr_r) rules are hp-admissible in G3$\mathcal{ALC}^*$.

Thank you for listening!