Theoretische Informatik und Logik

2. Repetitorium

Sommersemester 2018

Aufgabe M

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Jedes PSpace-harte Problem ist NP-hart.

b) Es gibt kein NP-hartes Problem, welches in PSpace liegt.

c) Jedes NP-vollständige Problem liegt in PSpace.

d) Es gilt NP = PSpace, wenn es ein PSpace-hartes Problem in NP gibt.

e) Wenn $P \neq NP$ gilt, dann gibt es kein NP-hartes Problem in P.

f) Sei $\mathbf{L}$ ein PSpace-vollständiges Problem. Dann gilt $\mathbf{L} \in P \iff P = \text{PSpace}$.

Aufgabe N

Wir betrachten folgende Position im Tic-Tac-Toe:

X		
	O	
O		X

Angenommen, Spieler X ist am Zug. Beschreiben Sie eine Gewinnstrategie für X.

Aufgabe O

Zeigen Sie, dass für jedes PSpace-vollständige Problem $\mathbf{L}$ auch das Komplement $\overline{\mathbf{L}}$ ein PSpace-vollständiges Problem ist.

Aufgabe P

Zeigen Sie: ist $P = NP$, dann sind alle Sprachen $\mathbf{L} \in P \setminus \{\emptyset, \Sigma^*\}$ NP-vollständig.

Aufgabe Q

Geben Sie für die Formel

$$F = \forall x.\exists y.(p(c_1, z) \wedge (q(x, c_2, z) \vee p(c_2, y))),$$

wobei c_1, c_2 Konstanten sind, folgendes an:

a) die Menge aller Teilformeln;

b) die Menge aller Terme;

c) die Menge aller Variablen, mit Unterscheidung freier und gebundener Variablen;

d) ein Interpretation $\mathcal{I}$ und eine Zuweisung $\mathcal{Z}$ für $\mathcal{I}$, so dass $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models F$.

Aufgabe R

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) Es gilt $\{F\} \models G$ genau dann, wenn $F \to G$ allgemeingültig ist.

b) Es gilt $\{F_1, \dots, F_k\} \models G$ genau dann, wenn $\bigwedge_{i=1}^{k} F_i \to G$ allgemeingültig ist.

Aufgabe S

Seien F, G Formeln und x eine Variable. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\exists x.(F \to G) \equiv \forall x.F \to \exists x.G.$$

Aufgabe T

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Jede Formel in Pränexform ist in Skolemform.

b) Jede Formel in Skolemform ist in Pränexform.

c) Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel.

d) Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel in Pränexform.

e) Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel in Skolemform.

Aufgabe U

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in Prädikatenlogik:

a) Jeder Drache ist glücklich, wenn alle seine Drachen-Kinder fliegen können.

b) Grüne Drachen können fliegen.

c) Ein Drache ist grün, wenn er Kind mindestens eines grünen Drachen ist.

d) Alle grünen Drachen sind glücklich.

Zeigen Sie, dass die letzte Aussage aus den ersten drei folgt.

Aufgabe V

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Zwei prädikatenlogische Formeln F und G sind äquivalent, wenn die Formel $F \leftrightarrow G$ allgemeingültig ist.

b) Jede erfüllbare Formel der Prädikatenlogik erster Stufe hat ein endliches Modell.

c) Jede erfüllbare Formel der Prädikatenlogik erster Stufe hat ein abzählbares Modell.

d) Jede Skolemformel hat höchstens eine Herbrand-Interpretation.

e) Jede Skolemformel hat mindestens ein Herbrand-Modell.

Aufgabe W

Zeigen Sie, dass man das Resolutionsverfahren der Prädikatenlogik erster Stufe auch zum Nachweis von semantischen Konsequenzen nutzen kann, indem Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen nachweisen:

a) $\Gamma \models F$.

b) $\Gamma \cup \{\neg F\}$ ist unerfüllbar.

c) $\bigwedge \Gamma \to F$ ist allgemeingültig.

d) $\bigwedge \Gamma \wedge \neg F$ ist unerfüllbar.

Hierbei sei $\bigwedge \Gamma = \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n$ für $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$.