TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Informatik, Institut für Theoretische Informatik, Professur Wissensbasierte Systeme

Prof. Dr. Markus Krötzsch

Dr. Stephan Mennicke

Übungen zur Lehrveranstaltung

Theoretische Informatik und Logik

Sommersemester 2024

5. Übungsblatt

Woche vom 13. bis 19. Mai

Die folgenden Aufgaben werden nicht in den Übungen besprochen und dienen der Selbstkontrolle.

Aufgabe J

Zeigen Sie, dass NP unter Kleene-Stern abgeschlossen ist.

Aufgabe 1

Wir betrachten das folgende Problem K: Gegeben eine aussagenlogische Formel φ mit n Variablen, gibt es eine erfüllende Belegung von φ, bei der mindestens die Hälfte aller in φ vorkommenden Variablen mit "true" belegt sind?

a) Formalisieren Sie dieses Problem als Sprache und zeigen Sie, dass $K \in \mathrm{NP}$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass K ein NP-schweres Problem ist.

Aufgabe 2

Im folgenden *Solitaire*-Spiel haben wir ein Spielbrett der Größe $m \times m$ gegeben. Als Ausgangsposition liegt auf jeder der m^2 Positionen entweder ein blauer Stein, ein roter Stein, oder gar nichts. Das Spiel wird nun so gespielt, dass Steine vom Brett genommen werden bis in jeder Spalte nur noch Steine einer Farbe liegen, und in jeder Zeile mindestens ein Stein liegen bleibt. In diesem Fall ist das Spiel gewonnen. Es ist möglich, dass man ausgehend von einer Ausgangsposition das Spiel nicht gewinnen kann.

a) Formalisieren Sie das Problem, für eine gegebene Ausgangsposition im Solitaire-Spiel zu entscheiden, ob es möglich ist, das Spiel zu gewinnen, als ein Entscheidungsproblem SOLITAIRE.

b) Zeigen Sie, dass SOLITAIRE $\in$ NP gilt.

c) Zeigen Sie, dass SOLITAIRE ein NP-schweres Problem ist, indem Sie zeigen, dass **3SAT** in polynomieller Zeit auf SOLITAIRE reduzierbar ist.

Aufgabe 3

Sei Σ ein Alphabet und $A, B \subseteq \Sigma^*$. Wir sagen, dass A auf B in *logarithmischen Platz reduzierbar ist*, und schreiben $A \leq_\ell B$, falls es eine Many-One-Reduktion von A nach B gibt, die in logarithmischen Platz berechenbar ist. Begründen Sie: Gilt $A \leq_\ell B$ und $B \leq_\ell C$, dann gilt auch $A \leq_\ell C$.
Anmerkung: Bei dieser Aufgabe ist nicht nach einem vollständigen Beweis, sondern eher nach einer Beweisidee gefragt.

Aufgabe 4

PCP-k ist das folgende Entscheidungsproblem:

Gegeben: eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ in unärer Kodierung und eine Instanz P des Postschen Korrespondenzproblems, d.h. eine endliche Folge von Wortpaaren

$$P = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad \cdots \quad \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$$

über einem Alphabet Σ, also $x_i, y_i \in \Sigma^+$ für $1 \leq i \leq n$.

Gefragt: Gibt es eine Lösung für P mit maximaler Länge k? Oder genauer: Gibt es eine Folge von Zahlen $i_1, \ldots, i_\ell$, so dass gilt:

$$x_{i_1} \cdots x_{i_\ell} = y_{i_1} \cdots y_{i_\ell},$$

wobei $0 < \ell \leq k$ ist und $i_j \in \{1, \ldots, n\}$ für alle $j = 1, \ldots, \ell$?

a) Zeigen Sie, dass **PCP**-k entscheidbar ist.

b) Zeigen Sie, dass **PCP**-k in NP liegt.