



Übungen zur Lehrveranstaltung

Formale Systeme

Wintersemester 2021/22

13. Übungsblatt

Wochen vom 24. bis 28. Januar 2022

Aufgabe 1

Prüfen Sie mittels Resolution die folgenden Formeln jeweils auf Erfüllbarkeit:

$$a \wedge \left((c \wedge b) \wedge ((\neg c \vee \neg b) \vee (a \wedge (c \wedge b))) \right)$$

$$(\neg a \vee \neg b) \wedge (a \vee b) \wedge (\neg a \vee c) \wedge (a \vee \neg c) \wedge (b \vee \neg d) \wedge (\neg b \vee d) \wedge (\neg c \vee d) \wedge (c \vee \neg d)$$

Aufgabe 2

Eine k -Färbung für einen endlichen Graphen G ist eine Zuordnung der Knoten von G zu Werten („Farben“) in $\{1, \dots, k\}$, so dass Knoten, die in G durch eine Kante verbunden sind, nicht denselben Wert zugeordnet bekommen.

Geben Sie für einen endlichen Graphen $G = (V, E)$ mit n Knoten und einen Wert k eine aussagenlogische Formel $\varphi_{G,k}$ an, so dass $\varphi_{G,k}$ genau dann erfüllbar ist, wenn es eine k -Färbung von G gibt.

Aufgabe 3

- Es sei φ eine Formel, die ausschließlich den Junktoren \rightarrow verwendet. Zeigen Sie: Wenn $w(p_i) = 1$ für alle $p_i \in \text{Var}(\varphi)$ ist, dann ist auch $w(\varphi) = 1$.
- Es sei φ eine allgemeine aussagenlogische Formel. Beweisen oder widerlegen Sie: φ ist äquivalent zu einer Formel, die ausschließlich den Junktoren \rightarrow verwendet.

Aufgabe 4

Sei Σ ein Alphabet und $L, L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ Sprachen mit $L, L_1, L_2 \in \mathcal{P}$.

Zeigen Sie:

- (a) $L_1 \cup L_2$, $L_1 \circ L_2$ und \bar{L} sind in polynomieller Zeit entscheidbar.
- (b) $L^R = \{w^R : w \in L\}$ ist in polynomieller Zeit entscheidbar, wobei für $w = a_1 \dots a_{n-1} a_n \in \Sigma^*$:
- $$w^R = a_n a_{n-1} \dots a_1$$
- (und $\varepsilon^R = \varepsilon$, $a^R = a$ für $a \in \Sigma$).

Aufgabe 5

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist *co-endlich* gdw. \bar{L} (also $\Sigma^* \setminus L$) endlich ist.

Beweisen oder widerlegen Sie:

- a) Jede co-endliche Sprache ist in $\text{DTIME}(n)$.
- b) Jede co-endliche Sprache ist in $\text{DTIME}(1)$.