TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Informatik, Institut für Künstliche Intelligenz, Professur Computational Logic

THEORETISCHE INFORMATIK UND LOGIK

14. Vorlesung: Modelltheorie und logisches Schließen

Hannes Straß

TU Dresden, 30. Mai 2022

Rückblick: Logelei

Wir kehren zurück auf das Inselreich mit Menschen von Typ W (kennen und sagen die Wahrheit) und Typ L (kennen die Wahrheit und sagen deren Negation).

Smullyan[1] fragte die Bewohner nach ihren Rauchgewohnheiten.

- Auf Insel A antwortete jeder der Bewohner:
  „Jeder, der hier von Typ W ist, raucht."
- Auf Insel B antwortete jeder der Bewohner:
  „Einige von uns hier sind von Typ L und rauchen."
- Auf Insel C hatten alle den gleichen Typ und jeder sagte:
  „Falls ich rauche, dann raucht jeder hier."
- Auf Insel D hatten alle den gleichen Typ und jeder sagte:
  „Einige hier rauchen, aber ich nicht."

Was können wir jeweils über die Bewohner und ihre Gewohnheiten schließen?

[1] R. Smullyan: A Beginner's Guide to Mathematical Logic, Dover 2014

Prädikatenlogik: Syntax

Wir betrachten unendliche, disjunkte Mengen von Variablen **V**, Konstanten **C** und Prädikatensymbolen **P**.

Ein prädikatenlogisches Atom ist ein Ausdruck $p(t_1, \ldots, t_n)$ für ein n-stelliges Prädikatensymbol $p \in \mathbf{P}$ und Terme $t_1, \ldots, t_n \in \mathbf{V} \cup \mathbf{C}$.
Die Menge der prädikatenlogische Formeln ist induktiv definiert:

- Jedes Atom $p(t_1, \ldots, t_n)$ ist eine prädikatenlogische Formel
- Wenn $x \in \mathbf{V}$ eine Variable und F und G prädikatenlogische Formeln sind, dann sind auch die folgenden prädikatenlogische Formeln:
  - $\neg F$ — Negation — „nicht F“
  - $(F \wedge G)$ — Konjunktion — „F und G“
  - $(F \vee G)$ — Disjunktion — „F oder G“
  - $(F \to G)$ — Implikation — „F impliziert G“
  - $(F \leftrightarrow G)$ — Äquivalenz — „F ist äquivalent zu G“
  - $\exists x.F$ — Existenzquantor — „für ein x gilt F“
  - $\forall x.F$ — Allquantor — „für alle x gilt F“

Semantik der Prädikatenlogik

Interpretationen und Zuweisungen

Die Wertzuweisungen der Aussagenlogik werden also durch Interpretationen und Zuweisungen für Variablen ersetzt.

Eine Interpretation $\mathcal{I}$ ist ein Paar $\langle \Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$ bestehend aus einer nichtleeren Grundmenge $\Delta^{\mathcal{I}}$ (der Domäne) und einer Interpretationsfunktion $\cdot^{\mathcal{I}}$, welche:

- jede Konstante $a \in \mathbf{C}$ auf ein Element $a^{\mathcal{I}} \in \Delta^{\mathcal{I}}$ und
- jedes n-stellige Prädikatensymbol $p \in \mathbf{P}$ auf eine Relation $p^{\mathcal{I}} \subseteq \left(\Delta^{\mathcal{I}}\right)^n$

abbildet.

Eine Zuweisung $\mathcal{Z}$ für eine Interpretation $\mathcal{I}$ ist eine Funktion $\mathcal{Z} : \mathbf{V} \to \Delta^{\mathcal{I}}$, die Variablen auf Elemente der Domäne abbildet. Für $x \in \mathbf{V}$ und $\delta \in \Delta^{\mathcal{I}}$ schreiben wir $\mathcal{Z}[x \mapsto \delta]$ für die Zuweisung, die x auf δ und alle anderen Variablen $y \neq x$ auf $\mathcal{Z}(y)$ abbildet.

Atome interpretieren

Wir bestimmen dementsprechend die Wahrheit von Atomen unter einer Interpretation und Zuweisung:

Sei $\mathcal{I}$ eine Interpretation und $\mathcal{Z}$ eine Zuweisung für $\mathcal{I}$.

- Für eine Konstante c definieren wir $c^{\mathcal{I},\mathcal{Z}} = c^{\mathcal{I}}$.
- Für eine Variable x definieren wir $x^{\mathcal{I},\mathcal{Z}} = \mathcal{Z}(x)$.

Für ein Atom $p(t_1, \ldots, t_n)$ setzen wir sodann:

- $p(t_1, \ldots, t_n)^{\mathcal{I},\mathcal{Z}} = 1$ wenn $\langle t_1^{\mathcal{I},\mathcal{Z}}, \ldots, t_n^{\mathcal{I},\mathcal{Z}} \rangle \in p^{\mathcal{I}}$ und
- $p(t_1, \ldots, t_n)^{\mathcal{I},\mathcal{Z}} = 0$ wenn $\langle t_1^{\mathcal{I},\mathcal{Z}}, \ldots, t_n^{\mathcal{I},\mathcal{Z}} \rangle \notin p^{\mathcal{I}}$.

Atome interpretieren

Wir bestimmen dementsprechend die Wahrheit von Atomen unter einer Interpretation und Zuweisung:

Sei $\mathcal{I}$ eine Interpretation und $\mathcal{Z}$ eine Zuweisung für $\mathcal{I}$.

- Für eine Konstante c definieren wir $c^{\mathcal{I},\mathcal{Z}} = c^{\mathcal{I}}$.
- Für eine Variable x definieren wir $x^{\mathcal{I},\mathcal{Z}} = \mathcal{Z}(x)$.

Für ein Atom $p(t_1, \ldots, t_n)$ setzen wir sodann:

- $p(t_1, \ldots, t_n)^{\mathcal{I},\mathcal{Z}} = 1$ wenn $\langle t_1^{\mathcal{I},\mathcal{Z}}, \ldots, t_n^{\mathcal{I},\mathcal{Z}} \rangle \in p^{\mathcal{I}}$ und
- $p(t_1, \ldots, t_n)^{\mathcal{I},\mathcal{Z}} = 0$ wenn $\langle t_1^{\mathcal{I},\mathcal{Z}}, \ldots, t_n^{\mathcal{I},\mathcal{Z}} \rangle \notin p^{\mathcal{I}}$.

Achtung: Wir verwenden Interpretationen und Zuweisungen auf zwei Ebenen, die man nicht verwechseln sollte:

(1) um Terme t auf Elemente $t^{\mathcal{I},\mathcal{Z}} \in \Delta^{\mathcal{I}}$ abzubilden;

(2) um Atome A auf Wahrheitswerte $A^{\mathcal{I},\mathcal{Z}} \in \{0, 1\}$ abzubilden.

Formeln interpretieren

Eine Interpretation $\mathcal{I}$ und eine Zuweisung $\mathcal{Z}$ für $\mathcal{I}$ erfüllen eine Formel F, in Symbolen $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models F$, wenn eine der folgenden rekursiven Bedingungen gilt:

Formel F	$\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models F$ wenn:	$\mathcal{I}, \mathcal{Z} \not\models F$ wenn:
F Atom	$F^{\mathcal{I},\mathcal{Z}} = 1$	$F^{\mathcal{I},\mathcal{Z}} = 0$
$\neg G$	$\mathcal{I}, \mathcal{Z} \not\models G$	$\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models G$
$(G_1 \wedge G_2)$	$\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models G_1$ und $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models G_2$	$\mathcal{I}, \mathcal{Z} \not\models G_1$ oder $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \not\models G_2$
$(G_1 \vee G_2)$	$\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models G_1$ oder $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models G_2$	$\mathcal{I}, \mathcal{Z} \not\models G_1$ und $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \not\models G_2$
$(G_1 \to G_2)$	$\mathcal{I}, \mathcal{Z} \not\models G_1$ oder $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models G_2$	$\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models G_1$ und $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \not\models G_2$
$(G_1 \leftrightarrow G_2)$	$\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models G_1$ und $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models G_2$ oder $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \not\models G_1$ und $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \not\models G_2$	$\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models G_1$ und $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \not\models G_2$ oder $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \not\models G_1$ und $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models G_2$
$\forall x.G$	$\mathcal{I}, \mathcal{Z}[x \mapsto \delta] \models G$ für alle $\delta \in \Delta^{\mathcal{I}}$	$\mathcal{I}, \mathcal{Z}[x \mapsto \delta] \not\models G$ für mindestens ein $\delta \in \Delta^{\mathcal{I}}$
$\exists x.G$	$\mathcal{I}, \mathcal{Z}[x \mapsto \delta] \models G$ für mindestens ein $\delta \in \Delta^{\mathcal{I}}$	$\mathcal{I}, \mathcal{Z}[x \mapsto \delta] \not\models G$ für alle $\delta \in \Delta^{\mathcal{I}}$

Gilt $\mathcal{I} \models F$ für einen Satz F, sagen wir: $\mathcal{I}$ ist ein Modell für F.

Beispiel

„Null ist eine natürliche Zahl und jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger, der ebenfalls eine natürliche Zahl ist.“

$$F = \mathsf{NatNum}(\mathsf{null}) \land \forall x.\big(\mathsf{NatNum}(x) \to \exists y.(\mathsf{succ}(x,y) \land \mathsf{NatNum}(y))\big)$$

Wir betrachten eine Interpretation $\mathcal{I}$ mit

- $\Delta^{\mathcal{I}} = \mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen
- $\mathsf{null}^{\mathcal{I}} = 0$
- $\mathsf{NatNum}^{\mathcal{I}} = \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ die Menge der natürlichen Zahlen
- $\mathsf{succ}^{\mathcal{I}} = \{\langle d, e\rangle \mid d, e \in \mathbb{R}, d < e\}$

Dann gilt $\mathcal{I} \models F$ (unter jeder beliebigen Zuweisung) – $\mathcal{I}$ ist ein Modell von F.

Notation: Bei der Interpretation von Sätzen (Formeln ohne freie Variablen) spielen Zuweisungen keine Rolle. Wir schreiben sie in diesem Fall nicht.

Logik auf Sätzen

Wie im vorigen Beispiel interessieren uns oft nur Sätze:

- In den meisten Anwendungen arbeitet man nur mit Sätzen.
- Dann genügt es, Interpretationen zu betrachten.
- Zuweisungen sind in diesem Fall ein technisches Hilfsmittel zur Definition der Bedeutung von Sätzen.

Eine Menge von Sätzen wird oft Theorie genannt.

Logik auf Sätzen

Wie im vorigen Beispiel interessieren uns oft nur Sätze:

- In den meisten Anwendungen arbeitet man nur mit Sätzen.
- Dann genügt es, Interpretationen zu betrachten.
- Zuweisungen sind in diesem Fall ein technisches Hilfsmittel zur Definition der Bedeutung von Sätzen.

Eine Menge von Sätzen wird oft Theorie genannt.

Beispiel: Der Begriff stammt aus der Mathematik. Die Theorie der partiellen Ordnungen kann man z.B. wie folgt definieren:

$$\forall x.(x \preceq x) \qquad \text{Reflexivität}$$

$$\forall x, y, z.((x \preceq y \land y \preceq z) \to x \preceq z) \qquad \text{Transitivität}$$

$$\forall x, y.((x \preceq y \land y \preceq x) \to x \approx y) \qquad \text{Antisymmetrie}$$

Dies definiert die Eigenschaften eines binären Prädikates $\preceq$ (hier infix geschrieben). Dabei verwenden wir zudem ein Gleichheitsprädikat $\approx$ (dazu später mehr).

Semantische Grundbegriffe

Modelltheorie

Wie definiert man logische Semantik „modelltheoretisch“?

Formeln	abzählbare Menge syntaktischer Ausdrücke
Interpretationen	Menge semantischer Strukturen
Erfüllungsrelation $\models$	Beziehung zwischen Interpretationen & Formeln: Welche Interpretationen sind Modelle welcher Formeln?

Modelltheorie

Wie definiert man logische Semantik „modelltheoretisch“?

		Aussagenl.
Formeln	abzählbare Menge syntaktischer Ausdrücke	Aussagenlogische Formeln
Interpretationen	Menge semantischer Strukturen	Wertzuweisungen
Erfüllungsrelation $\models$	Beziehung zwischen Interpretationen & Formeln: Welche Interpretationen sind Modelle welcher Formeln?	Aussagenlogische Erfüllungsrelation

Modelltheorie

Wie definiert man logische Semantik „modelltheoretisch“?

		Aussagenl.	Prädikatenl.
Formeln	abzählbare Menge syntaktischer Ausdrücke	Aussagenlogische Formeln	Prädikatenlogische Sätze
Interpretationen	Menge semantischer Strukturen	Wertzuweisungen	Prädikatenlogische Interpretationen
Erfüllungsrelation $\models$	Beziehung zwischen Interpretationen & Formeln: Welche Interpretationen sind Modelle welcher Formeln?	Aussagenlogische Erfüllungsrelation	Prädikatenlogische Erfüllungsrelation

Modelltheorie

Wie definiert man logische Semantik „modelltheoretisch"?

		Aussagenl.	**Prädikatenl.**	**Prädikatenl. (offen)**
Formeln	abzählbare Menge syntaktischer Ausdrücke	Aussagenlogische Formeln	Prädikatenlogische Sätze	Prädikatenlogische Formeln (offen oder geschlossen)
Interpretationen	Menge semantischer Strukturen	Wertzuweisungen	Prädikatenlogische Interpretationen	Prädikatenlogische Interpretationen + Zuweisungen
Erfüllungsrelation $\models$	Beziehung zwischen Interpretationen & Formeln: Welche Interpretationen sind Modelle welcher Formeln?	Aussagenlogische Erfüllungsrelation	Prädikatenlogische Erfüllungsrelation	Prädikatenlogische Erfüllungsrelation

Modelltheorie: Intuition

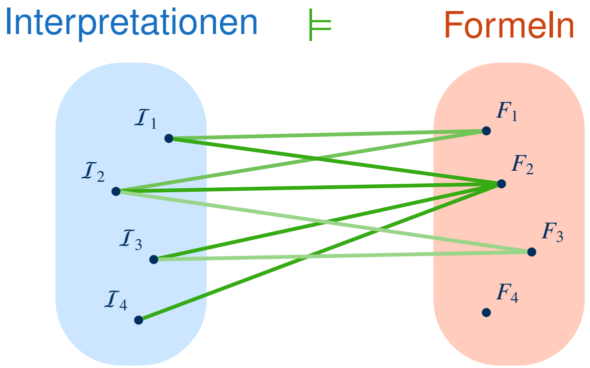
Die Modelltheorie einer Logik legt (ziemlich abstrakt) fest, worüber die Logik etwas aussagt:

- Formeln: Behauptungen, die wahr oder falsch sein können.
- Interpretationen: Mögliche Welten, in denen manche Behauptungen gelten und andere nicht.
- Modelle: Interpretationen, die eine bestimmte Formel oder Theorie erfüllen.

Modelltheorie: Intuition

Die Modelltheorie einer Logik legt (ziemlich abstrakt) fest, worüber die Logik etwas aussagt:

- Formeln: Behauptungen, die wahr oder falsch sein können.
- Interpretationen: Mögliche Welten, in denen manche Behauptungen gelten und andere nicht.
- Modelle: Interpretationen, die eine bestimmte Formel oder Theorie erfüllen.



Tautologien und Widersprüche

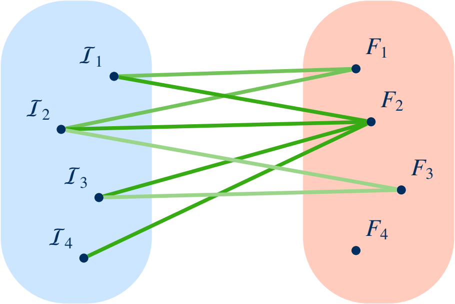
Man unterscheidet Typen von Formeln nach ihren Modellen:

- allgemeingültig (tautologisch): Eine Formel, die in allen Interpretationen wahr ist (alle Interpretationen als Modelle hat).
- widersprüchlich (unerfüllbar): Eine Formel, die in keiner Interpretation wahr ist (kein Modell hat).
- erfüllbar: Eine Formel, die in einer Interpretation wahr ist (ein Modell hat).
- widerlegbar: Eine Formel, die in einer Interpretation falsch ist (deren Negation ein Modell hat).

Tautologien und Widersprüche

Man unterscheidet Typen von Formeln nach ihren Modellen:

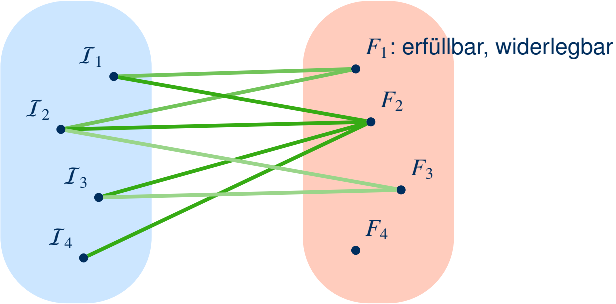
- allgemeingültig (tautologisch): Eine Formel, die in allen Interpretationen wahr ist (alle Interpretationen als Modelle hat).
- widersprüchlich (unerfüllbar): Eine Formel, die in keiner Interpretation wahr ist (kein Modell hat).
- erfüllbar: Eine Formel, die in einer Interpretation wahr ist (ein Modell hat).
- widerlegbar: Eine Formel, die in einer Interpretation falsch ist (deren Negation ein Modell hat).



Tautologien und Widersprüche

Man unterscheidet Typen von Formeln nach ihren Modellen:

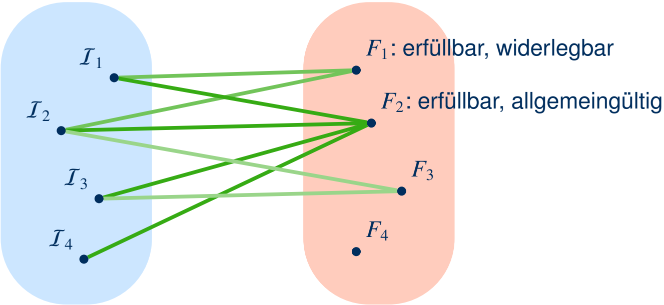
- allgemeingültig (tautologisch): Eine Formel, die in allen Interpretationen wahr ist (alle Interpretationen als Modelle hat).
- widersprüchlich (unerfüllbar): Eine Formel, die in keiner Interpretation wahr ist (kein Modell hat).
- erfüllbar: Eine Formel, die in einer Interpretation wahr ist (ein Modell hat).
- widerlegbar: Eine Formel, die in einer Interpretation falsch ist (deren Negation ein Modell hat).



Tautologien und Widersprüche

Man unterscheidet Typen von Formeln nach ihren Modellen:

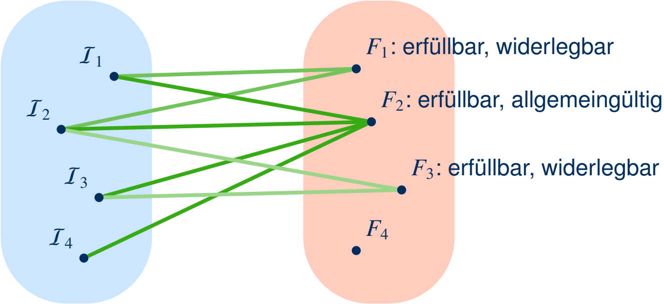
- allgemeingültig (tautologisch): Eine Formel, die in allen Interpretationen wahr ist (alle Interpretationen als Modelle hat).
- widersprüchlich (unerfüllbar): Eine Formel, die in keiner Interpretation wahr ist (kein Modell hat).
- erfüllbar: Eine Formel, die in einer Interpretation wahr ist (ein Modell hat).
- widerlegbar: Eine Formel, die in einer Interpretation falsch ist (deren Negation ein Modell hat).



Tautologien und Widersprüche

Man unterscheidet Typen von Formeln nach ihren Modellen:

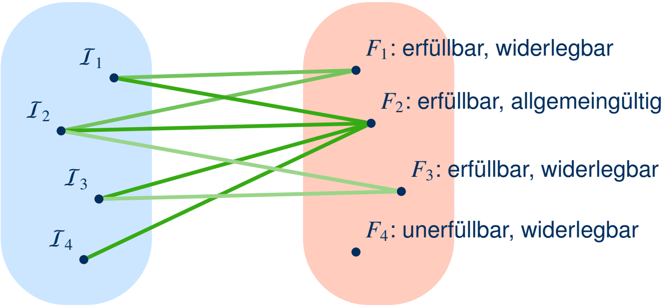
- allgemeingültig (tautologisch): Eine Formel, die in allen Interpretationen wahr ist (alle Interpretationen als Modelle hat).
- widersprüchlich (unerfüllbar): Eine Formel, die in keiner Interpretation wahr ist (kein Modell hat).
- erfüllbar: Eine Formel, die in einer Interpretation wahr ist (ein Modell hat).
- widerlegbar: Eine Formel, die in einer Interpretation falsch ist (deren Negation ein Modell hat).



Tautologien und Widersprüche

Man unterscheidet Typen von Formeln nach ihren Modellen:

- allgemeingültig (tautologisch): Eine Formel, die in allen Interpretationen wahr ist (alle Interpretationen als Modelle hat).
- widersprüchlich (unerfüllbar): Eine Formel, die in keiner Interpretation wahr ist (kein Modell hat).
- erfüllbar: Eine Formel, die in einer Interpretation wahr ist (ein Modell hat).
- widerlegbar: Eine Formel, die in einer Interpretation falsch ist (deren Negation ein Modell hat).

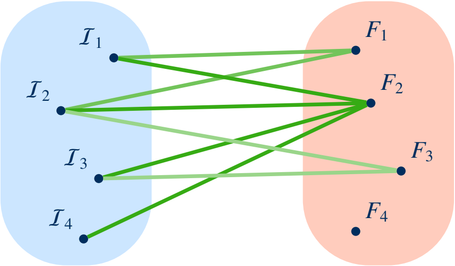


Logisches Schließen

Aus der Modelltheorie ergibt sich, was logisches Schließen genau bedeutet und welche Schlüsse man ziehen darf:

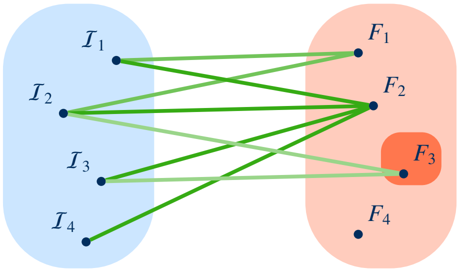
- Wenn $\mathcal{I} \models F$, dann nennt man $\mathcal{I}$ ein Modell für die Formel F und man sagt $\mathcal{I}$ erfüllt F.
- $\mathcal{I}$ ist ein Modell für eine Formelmenge $\mathcal{T}$, in Symbolen $\mathcal{I} \models \mathcal{T}$, wenn $\mathcal{I} \models F$ für jede Formel $F \in \mathcal{T}$.
- Eine Formel F ist eine logische Konsequenz aus einer Formel(menge) G, in Symbolen $G \models F$, wenn jedes Modell von G auch ein Modell von F ist, d.h. $\mathcal{I} \models G$ impliziert $\mathcal{I} \models F$.
  Sonderfall: Ist F eine Tautologie, dann schreiben wir $\models F$.
- Zwei Formel(menge)n F und G sind semantisch äquivalent, in Symbolen $F \equiv G$, wenn sie die gleichen Modelle haben, d.h. wenn für alle Interpretationen $\mathcal{I}$ gilt: $\mathcal{I} \models F$ gdw. $\mathcal{I} \models G$.

Beispiel: Logisches Schließen



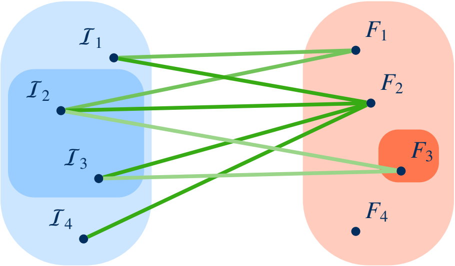
Was folgt aus F_3?

Beispiel: Logisches Schließen



Was folgt aus F_3?

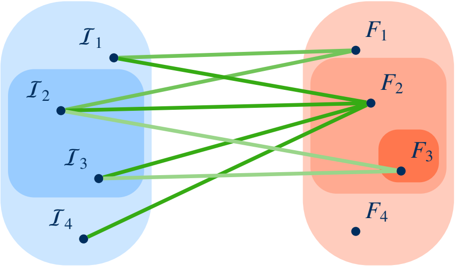
Beispiel: Logisches Schließen



Was folgt aus F_3?

- Die Modelle von F_3 sind $\mathcal{I}_2$ und $\mathcal{I}_3$.

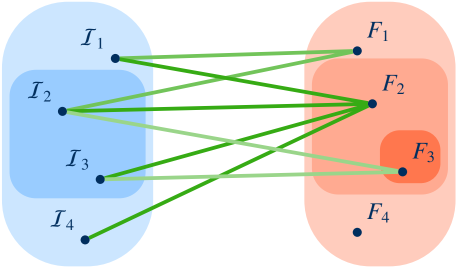
Beispiel: Logisches Schließen



Was folgt aus F_3?

- Die Modelle von F_3 sind $\mathcal{I}_2$ und $\mathcal{I}_3$.
- $\mathcal{I}_2$ und $\mathcal{I}_3$ sind wiederum gemeinsame Modelle von zwei Formeln: F_3 und F_2.

Beispiel: Logisches Schließen

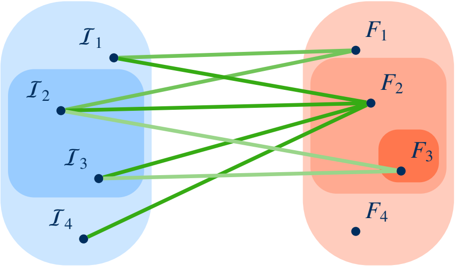


Was folgt aus F_3?

- Die Modelle von F_3 sind $\mathcal{I}_2$ und $\mathcal{I}_3$.
- $\mathcal{I}_2$ und $\mathcal{I}_3$ sind wiederum gemeinsame Modelle von zwei Formeln: F_3 und F_2.

Anders gesagt: „Immer wenn F_3 wahr ist, dann ist auch F_2 wahr.“

Beispiel: Logisches Schließen



Was folgt aus F_3?

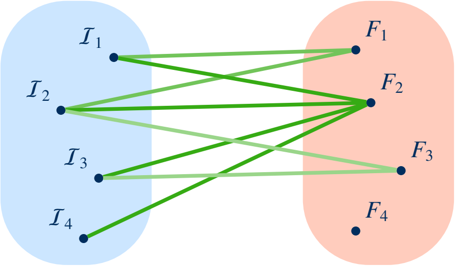
- Die Modelle von F_3 sind $\mathcal{I}_2$ und $\mathcal{I}_3$.
- $\mathcal{I}_2$ und $\mathcal{I}_3$ sind wiederum gemeinsame Modelle von zwei Formeln: F_3 und F_2.

Anders gesagt: „Immer wenn F_3 wahr ist, dann ist auch F_2 wahr.“

Es gilt also: $F_3 \models F_2$.

Quiz: Logisches Schließen

Es gilt $F \models G$ gdw. jedes Modell für F auch ein Modell für G ist.



Quiz: Welche der folgenden Schlussfolgerungen gelten? …

Eigenschaften der semantischen Äquivalenz

Die aus der Aussagenlogik bekannten Eigenschaften von $\equiv$ gelten auch allgemein:

Satz: $\equiv$ ist eine Äquivalenzrelation, d.h. reflexiv, symmetrisch und transitiv.

Satz:

- Alle Tautologien sind semantisch äquivalent.
- Alle unerfüllbaren Formeln sind semantisch äquivalent.

Satz: Semantische Äquivalenz entspricht wechselseitiger logischer Konsequenz:

$$F \equiv G \qquad \text{genau dann wenn} \qquad F \models G \text{ und } G \models F$$

Die Behauptungen folgen jeweils direkt aus den Definitionen.

Inseln mit Lügnern und Wahrheitssagern

Rückblick Logelei: „Wir sind hier alle vom gleichen Typ.“

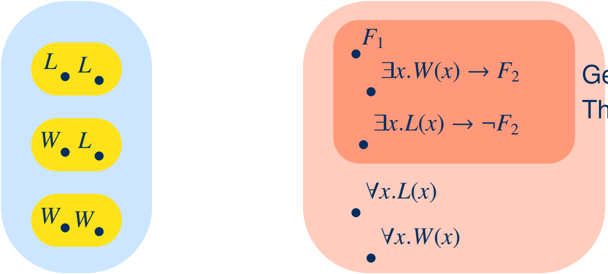
- „Jeder Einwohner ist entweder Wahrheitssager oder Lügner.“
  $F_1 = \forall x.((W(x) \land \neg L(x)) \lor (L(x) \land \neg W(x)))$
- „Auf dieser Insel haben alle den gleichen Typ.“
  $F_2 = \forall x.W(x) \lor \forall x.L(x)$

Inseln mit Lügnern und Wahrheitssagern

Rückblick Logelei: „Wir sind hier alle vom gleichen Typ.“

- „Jeder Einwohner ist entweder Wahrheitssager oder Lügner.“
  $F_1 = \forall x.((W(x) \land \neg L(x)) \lor (L(x) \land \neg W(x)))$
- „Auf dieser Insel haben alle den gleichen Typ.“
  $F_2 = \forall x.W(x) \lor \forall x.L(x)$

Wir betrachten einige „repräsentative“ Modelle von F_1, eine Formalisierung der gegebenen Information und weitere Formeln:



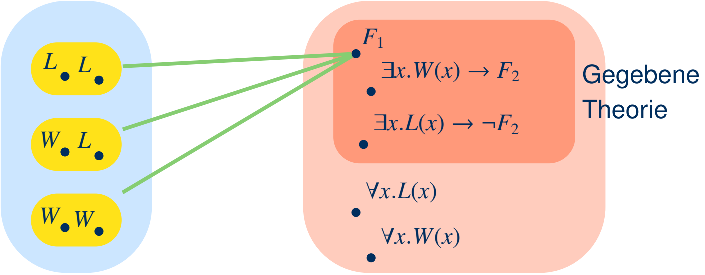
Gegebene Theorie

Inseln mit Lügnern und Wahrheitssagern

Rückblick Logelei: „Wir sind hier alle vom gleichen Typ."

- „Jeder Einwohner ist entweder Wahrheitssager oder Lügner."
  $F_1 = \forall x.((W(x) \land \neg L(x)) \lor (L(x) \land \neg W(x)))$
- „Auf dieser Insel haben alle den gleichen Typ."
  $F_2 = \forall x.W(x) \lor \forall x.L(x)$

Wir betrachten einige „repräsentative" Modelle von F_1, eine Formalisierung der gegebenen Information und weitere Formeln:

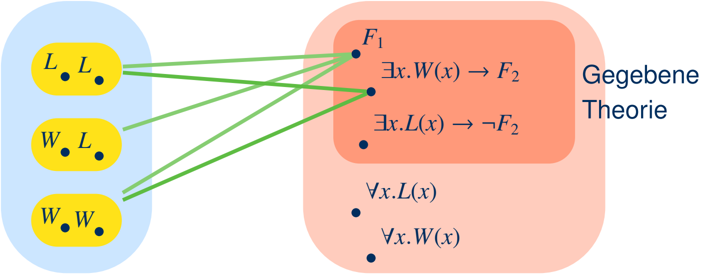


Inseln mit Lügnern und Wahrheitssagern

Rückblick Logelei: „Wir sind hier alle vom gleichen Typ."

- „Jeder Einwohner ist entweder Wahrheitssager oder Lügner."
  $F_1 = \forall x.((W(x) \land \neg L(x)) \lor (L(x) \land \neg W(x)))$
- „Auf dieser Insel haben alle den gleichen Typ."
  $F_2 = \forall x.W(x) \lor \forall x.L(x)$

Wir betrachten einige „repräsentative" Modelle von F_1, eine Formalisierung der gegebenen Information und weitere Formeln:

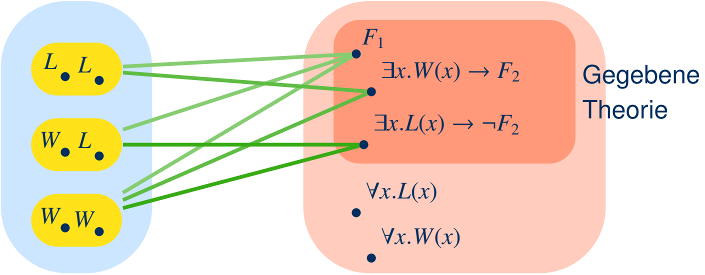


Inseln mit Lügnern und Wahrheitssagern

Rückblick Logelei: „Wir sind hier alle vom gleichen Typ.“

- „Jeder Einwohner ist entweder Wahrheitssager oder Lügner.“
  $F_1 = \forall x.((W(x) \land \neg L(x)) \lor (L(x) \land \neg W(x)))$
- „Auf dieser Insel haben alle den gleichen Typ.“
  $F_2 = \forall x.W(x) \lor \forall x.L(x)$

Wir betrachten einige „repräsentative“ Modelle von F_1, eine Formalisierung der gegebenen Information und weitere Formeln:

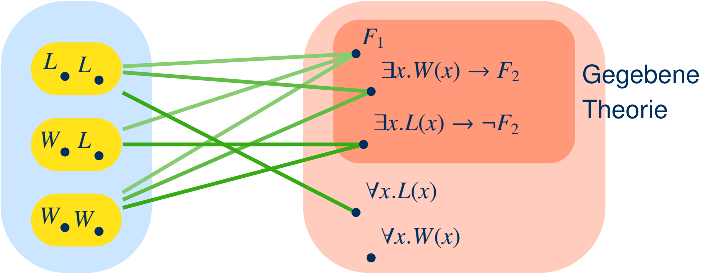


Inseln mit Lügnern und Wahrheitssagern

Rückblick Logelei: „Wir sind hier alle vom gleichen Typ."

- „Jeder Einwohner ist entweder Wahrheitssager oder Lügner."
  $F_1 = \forall x.((W(x) \land \neg L(x)) \lor (L(x) \land \neg W(x)))$
- „Auf dieser Insel haben alle den gleichen Typ."
  $F_2 = \forall x.W(x) \lor \forall x.L(x)$

Wir betrachten einige „repräsentative" Modelle von F_1, eine Formalisierung der gegebenen Information und weitere Formeln:

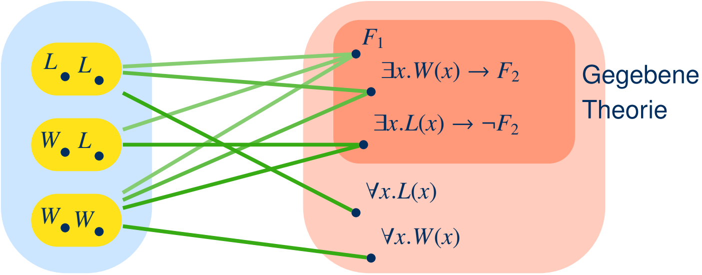


Inseln mit Lügnern und Wahrheitssagern

Rückblick Logelei: „Wir sind hier alle vom gleichen Typ."

- „Jeder Einwohner ist entweder Wahrheitssager oder Lügner."
  $F_1 = \forall x.((W(x) \land \neg L(x)) \lor (L(x) \land \neg W(x)))$
- „Auf dieser Insel haben alle den gleichen Typ."
  $F_2 = \forall x.W(x) \lor \forall x.L(x)$

Wir betrachten einige „repräsentative" Modelle von F_1, eine Formalisierung der gegebenen Information und weitere Formeln:

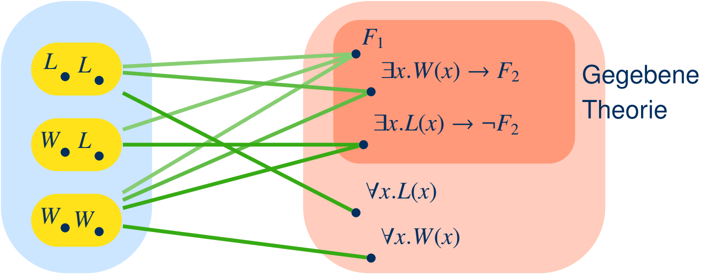


Inseln mit Lügnern und Wahrheitssagern

Rückblick Logelei: „Wir sind hier alle vom gleichen Typ."

- „Jeder Einwohner ist entweder Wahrheitssager oder Lügner."
  $F_1 = \forall x.((W(x) \land \neg L(x)) \lor (L(x) \land \neg W(x)))$
- „Auf dieser Insel haben alle den gleichen Typ."
  $F_2 = \forall x.W(x) \lor \forall x.L(x)$

Wir betrachten einige „repräsentative" Modelle von F_1, eine Formalisierung der gegebenen Information und weitere Formeln:



Aus der Theorie folgt $\forall x.W(x)$: „Alle Inselbewohner sind von Typ W."

Das Problem des logischen Schließens

Zwei praktisch wichtige Fragen:

(1) Model Checking:
Für eine gegebene Interpretation $\mathcal{I}$ und eine Formel F, gilt $\mathcal{I} \models F$?

(2) Logische Folgerung (Entailment):
Für gegebene Formel(menge)n F und G, gilt $F \models G$?

Das Problem des logischen Schließens

Zwei praktisch wichtige Fragen:

(1) Model Checking:
Für eine gegebene Interpretation $\mathcal{I}$ und eine Formel F, gilt $\mathcal{I} \models F$?

(2) Logische Folgerung (Entailment):
Für gegebene Formel(menge)n F und G, gilt $F \models G$?

In der Aussagenlogik ist beides relativ einfach lösbar:

(1) Berechne den Wahrheitswert unter einer Belegung (in linearer Zeit).

(2) Überprüfe Unerfüllbarkeit von $F \wedge \neg G$ (coNP-vollständig).

Das Problem des logischen Schließens

Zwei praktisch wichtige Fragen:

(1) Model Checking:
Für eine gegebene Interpretation $\mathcal{I}$ und eine Formel F, gilt $\mathcal{I} \models F$?

(2) Logische Folgerung (Entailment):
Für gegebene Formel(menge)n F und G, gilt $F \models G$?

In der Aussagenlogik ist beides relativ einfach lösbar:

(1) Berechne den Wahrheitswert unter einer Belegung (in linearer Zeit).

(2) Überprüfe Unerfüllbarkeit von $F \wedge \neg G$ (coNP-vollständig).

In der Prädikatenlogik ist das nicht so einfach:
Siehe kommende Vorlesungen.

Monotonie und Tautologie

Aus der Definition von $\models$ folgt Monotonie:

- Mehr Sätze $\Leftrightarrow$ weniger Modelle:
- Je mehr Sätze in einer logischen Theorie gegeben sind,
  desto weniger Modelle hat die gesamte Theorie,
  desto mehr Schlussfolgerungen kann man aus ihr ziehen.

Das heißt: „Mehr Annahmen führen zu mehr Schlussfolgerungen.“

Monotonie und Tautologie

Aus der Definition von $\models$ folgt Monotonie:

- Mehr Sätze $\Leftrightarrow$ weniger Modelle:
- Je mehr Sätze in einer logischen Theorie gegeben sind,
  desto weniger Modelle hat die gesamte Theorie,
  desto mehr Schlussfolgerungen kann man aus ihr ziehen.

Das heißt: „Mehr Annahmen führen zu mehr Schlussfolgerungen."

Formal heißt Monotonie:

$$\text{Aus } \mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2 \text{ folgt stets } \{F \mid \mathcal{T}_1 \models F\} \subseteq \{F \mid \mathcal{T}_2 \models F\}.$$

Monotonie und Tautologie

Aus der Definition von $\models$ folgt Monotonie:

- Mehr Sätze $\Leftrightarrow$ weniger Modelle:
- Je mehr Sätze in einer logischen Theorie gegeben sind,
  desto weniger Modelle hat die gesamte Theorie,
  desto mehr Schlussfolgerungen kann man aus ihr ziehen.

Das heißt: „Mehr Annahmen führen zu mehr Schlussfolgerungen."

Formal heißt Monotonie:

$$\text{Aus } \mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2 \text{ folgt stets } \{F \mid \mathcal{T}_1 \models F\} \subseteq \{F \mid \mathcal{T}_2 \models F\}.$$

Die Extremfälle dieses Prinzips sind:

- Tautologien: sind in jeder Interpretation wahr und daher logische Konsequenz jeder Theorie.
- Unerfüllbare Formeln: sind in keinem Modell wahr und haben daher alle anderen Sätze als Konsequenz.

Modelltheorie ist allgemein gültig

Was wir bisher über Modelltheorie gesagt haben, gilt für jede Logik, deren Semantik auf einer Modell-Beziehung $\models$ von Interpretationen zu einzelnen Formeln basiert:

- Aussagenlogik
- Prädikatenlogik (nur Sätze und Interpretationen)
- Prädikatenlogik (beliebige Formeln und Interpretationen+Zuweisungen)
- Logik zweiter Stufe
- Modal-, Temporal- und Beschreibungslogiken
- Mehrwertige Logiken
- Nichtklassische Logiken
- ...

Andere Eigenschaften der Prädikatenlogik sind nicht ganz so allgemein.

Prädikatenlogik und Aussagenlogik

Verhältnis zur Aussagenlogik

Die Semantik der Operatoren $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$ und $\leftrightarrow$ ist in Prädikatenlogik und Aussagenlogik gleich definiert:

- Wir ersetzen Wertzuweisungen w durch Interpretationen $\mathcal{I}$ mit Zuweisungen $\mathcal{Z}$.
- Ansonsten ist die Definition der Semantik genau gleich.

$\leadsto$ Alle aussagenlogischen Gesetze gelten analog.

Verhältnis zur Aussagenlogik

Die Semantik der Operatoren $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ ist in Prädikatenlogik und Aussagenlogik gleich definiert:

- Wir ersetzen Wertzuweisungen w durch Interpretationen $\mathcal{I}$ mit Zuweisungen $\mathcal{Z}$.
- Ansonsten ist die Definition der Semantik genau gleich.

$\leadsto$ Alle aussagenlogischen Gesetze gelten analog.

Beispiel: Die De Morganschen Regeln gelten auch in der Prädikatenlogik, z.B. $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models \neg(F \wedge G)$ genau dann wenn $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models (\neg F \vee \neg G)$, das heißt $\neg(F \wedge G) \equiv (\neg F \vee \neg G)$.

Allgemein gelten alle bekannten aussagenlogischen Äquivalenzen.

„$\models$ = $\rightarrow$“ und „$\equiv$ = $\leftrightarrow$“

Auch die folgenden Sätze gelten analog zur Aussagenlogik:

(Siehe Formale Systeme, Vorlesung 22)

Satz (Deduktionstheorem): Für jede Formelmenge $\mathcal{F}$ und Formeln G und H gilt $\mathcal{F} \models G \rightarrow H$ genau dann wenn $\mathcal{F} \cup \{G\} \models H$.

Korollar: $F \wedge G \models H$ genau dann wenn $F \models G \rightarrow H$.

Korollar: $F \equiv G$ genau dann wenn $\models F \leftrightarrow G$.

Dennoch sind $\models$ und $\equiv$ nicht dasselbe wie $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$:

- Die Relationen $\models$ und $\equiv$ können sich auch auf (möglicherweise unendliche) Mengen von Formeln beziehen.
- Die Symbole $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ sind syntaktische Operatoren und können (eventuell geschachtelt) in Formeln auftreten.

Das Ersetzungstheorem

Auch das folgende intuitiv einleuchtende Ergebnis kann von der Aussagenlogik auf die Prädikatenlogik übertragen werden:

Satz (Ersetzungstheorem): Sei F eine Formel mit einer Teilformel G. Wenn $G \equiv G'$ und wenn F' aus F gebildet werden kann, indem man ein beliebiges Vorkommen von G in F durch G' ersetzt, dann gilt auch $F \equiv F'$.

Der detaillierte Beweis muss allerdings alle möglichen Formen von Formeln betrachten (Induktion über Formelstruktur). Im Vergleich zur Aussagenlogik müsste man also noch zeigen, dass die Ersetzung von äquivalenten Formeln in $\exists x.G$ und $\forall x.G$ zulässig ist.

Rückblick: Aussagenlogische Äquivalenzen (1)

$F \wedge G \equiv G \wedge F$ $F \vee G \equiv G \vee F$	Kommutativität
$(F \wedge G) \wedge H \equiv F \wedge (G \wedge H)$ $(F \vee G) \vee H \equiv F \vee (G \vee H)$	Assoziativität
$F \wedge (G \vee H) \equiv (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$ $F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$	Distributivität
$F \wedge F \equiv F$ $F \vee F \equiv F$	Idempotenz
$F \wedge (F \vee G) \equiv F$ $F \vee (F \wedge G) \equiv F$	Absorbtion

Rückblick: Aussagenlogische Äquivalenzen (2)

$\neg\neg F \equiv F$	doppelte Negation
$\neg(F \wedge G) \equiv (\neg F \vee \neg G)$ $\neg(F \vee G) \equiv (\neg F \wedge \neg G)$	De Morgansche Gesetze
$F \wedge \top \equiv F$ $F \vee \top \equiv \top$	Gesetze mit $\top$
$F \wedge \bot \equiv \bot$ $F \vee \bot \equiv F$	Gesetze mit $\bot$
$\neg\top \equiv \bot$ $\neg\bot \equiv \top$	

Dabei stellen wir wie zuvor $\top$ durch eine beliebige Tautologie (z.B. $p \vee \neg p$) und $\bot$ durch einen beliebigen Widerspruch (z.B. $p \wedge \neg p$) dar.

Aussagenlogik in Prädikatenlogik darstellen

Aussagenlogische Atome p kann man durch prädikatenlogische Atome $p()$ auffassen, wobei p ein nullstelliges Prädikatensymbol ist.

Sei $p \in \mathbf{P}$ ein nullstelliges Prädikat.

Welche Interpretationen $p^{\mathcal{I}}$ sind möglich?

Aussagenlogik in Prädikatenlogik darstellen

Aussagenlogische Atome p kann man durch prädikatenlogische Atome $p()$ auffassen, wobei p ein nullstelliges Prädikatensymbol ist.

Sei $p \in \mathbf{P}$ ein nullstelliges Prädikat.

Welche Interpretationen $p^{\mathcal{I}}$ sind möglich?

- Laut Definition gilt $p^{\mathcal{I}} \subseteq (\Delta^{\mathcal{I}})^0$.

Aussagenlogik in Prädikatenlogik darstellen

Aussagenlogische Atome p kann man durch prädikatenlogische Atome $p()$ auffassen, wobei p ein nullstelliges Prädikatensymbol ist.

Sei $p \in \mathbf{P}$ ein nullstelliges Prädikat.

Welche Interpretationen $p^{\mathcal{I}}$ sind möglich?

- Laut Definition gilt $p^{\mathcal{I}} \subseteq (\Delta^{\mathcal{I}})^0$.
- $(\Delta^{\mathcal{I}})^0$ enthält alle „nullstelligen Tupel“.
  $\leadsto$ Es gibt aber nur ein einziges nullstelliges Tupel $\langle\rangle$.

Aussagenlogik in Prädikatenlogik darstellen

Aussagenlogische Atome p kann man durch prädikatenlogische Atome $p()$ auffassen, wobei p ein nullstelliges Prädikatensymbol ist.

Sei $p \in \mathbf{P}$ ein nullstelliges Prädikat.

Welche Interpretationen $p^{\mathcal{I}}$ sind möglich?

- Laut Definition gilt $p^{\mathcal{I}} \subseteq (\Delta^{\mathcal{I}})^0$.
- $(\Delta^{\mathcal{I}})^0$ enthält alle „nullstelligen Tupel“.
  $\rightsquigarrow$ Es gibt aber nur ein einziges nullstelliges Tupel $\langle\rangle$.
- Also ist $p^{\mathcal{I}} \subseteq \{\langle\rangle\}$:
  - $p^{\mathcal{I}} = \{\langle\rangle\}$ bedeutet $\mathcal{I} \models p()$ („Aussage wahr“);
  - $p^{\mathcal{I}} = \{\}$ bedeutet $\mathcal{I} \not\models p()$ („Aussage falsch“).

Deshalb kann man nullstellige Prädikate wie aussagenlogische Atome verwenden.

In diesem Sinne ist die Aussagenlogik ein Teil der Prädikatenlogik.

Auflösung: Logelei

Im Inselreich der Menschen von Typ W und Typ L fragte Smullyan[1] die Bewohner nach ihren Rauchgewohnheiten:

- Auf Insel A antwortete jeder der Bewohner:
  „Jeder, der hier von Typ W ist, raucht."
- Auf Insel B antwortete jeder der Bewohner:
  „Einige von uns hier sind von Typ L und rauchen."
- Auf Insel C hatten alle den gleichen Typ und jeder sagte:
  „Falls ich rauche, dann raucht jeder hier."
- Auf Insel D hatten alle den gleichen Typ und jeder sagte:
  „Einige hier rauchen, aber ich nicht."

---

[1] R. Smullyan: A Beginner's Guide to Mathematical Logic, Dover 2014

Auflösung: Logelei

Im Inselreich der Menschen von Typ W und Typ L fragte Smullyan[1] die Bewohner nach ihren Rauchgewohnheiten:

- Auf Insel A antwortete jeder der Bewohner:
  „Jeder, der hier von Typ W ist, raucht."
  Die Aussage stimmt und alle sind vom Typ W.
- Auf Insel B antwortete jeder der Bewohner:
  „Einige von uns hier sind von Typ L und rauchen."
- Auf Insel C hatten alle den gleichen Typ und jeder sagte:
  „Falls ich rauche, dann raucht jeder hier."
- Auf Insel D hatten alle den gleichen Typ und jeder sagte:
  „Einige hier rauchen, aber ich nicht."

[1] R. Smullyan: A Beginner's Guide to Mathematical Logic, Dover 2014

Auflösung: Logelei

Im Inselreich der Menschen von Typ W und Typ L fragte Smullyan[1] die Bewohner nach ihren Rauchgewohnheiten:

- Auf Insel A antwortete jeder der Bewohner:
  „Jeder, der hier von Typ W ist, raucht.“
  Die Aussage stimmt und alle sind vom Typ W.
- Auf Insel B antwortete jeder der Bewohner:
  „Einige von uns hier sind von Typ L und rauchen.“
  Alle sind vom Typ L und keiner raucht.
- Auf Insel C hatten alle den gleichen Typ und jeder sagte:
  „Falls ich rauche, dann raucht jeder hier.“
- Auf Insel D hatten alle den gleichen Typ und jeder sagte:
  „Einige hier rauchen, aber ich nicht.“

[1] R. Smullyan: A Beginner's Guide to Mathematical Logic, Dover 2014

Auflösung: Logelei

Im Inselreich der Menschen von Typ W und Typ L fragte Smullyan[1] die Bewohner nach ihren Rauchgewohnheiten:

- Auf Insel A antwortete jeder der Bewohner:
  „Jeder, der hier von Typ W ist, raucht."
  Die Aussage stimmt und alle sind vom Typ W.
- Auf Insel B antwortete jeder der Bewohner:
  „Einige von uns hier sind von Typ L und rauchen."
  Alle sind vom Typ L und keiner raucht.
- Auf Insel C hatten alle den gleichen Typ und jeder sagte:
  „Falls ich rauche, dann raucht jeder hier."
  Alle sagen die Wahrheit; es rauchen alle oder keiner.
- Auf Insel D hatten alle den gleichen Typ und jeder sagte:
  „Einige hier rauchen, aber ich nicht."

[1] R. Smullyan: A Beginner's Guide to Mathematical Logic, Dover 2014

Auflösung: Logelei

Im Inselreich der Menschen von Typ W und Typ L fragte Smullyan[1] die Bewohner nach ihren Rauchgewohnheiten:

- Auf Insel A antwortete jeder der Bewohner:
  „Jeder, der hier von Typ W ist, raucht."
  Die Aussage stimmt und alle sind vom Typ W.
- Auf Insel B antwortete jeder der Bewohner:
  „Einige von uns hier sind von Typ L und rauchen."
  Alle sind vom Typ L und keiner raucht.
- Auf Insel C hatten alle den gleichen Typ und jeder sagte:
  „Falls ich rauche, dann raucht jeder hier."
  Alle sagen die Wahrheit; es rauchen alle oder keiner.
- Auf Insel D hatten alle den gleichen Typ und jeder sagte:
  „Einige hier rauchen, aber ich nicht."
  Alle lügen; es rauchen alle oder keiner.

[1] R. Smullyan: A Beginner's Guide to Mathematical Logic, Dover 2014

Zusammenfassung und Ausblick

Modelltheorie definiert logische Semantik aus der Beziehung von Formeln (Behauptungen) und Interpretationen (möglichen Welten).

Logisches Schließen ist die Berechnung (Überprüfung) einzelner Beziehungen der Form $\mathcal{I} \models F$ (Model checking) bzw. $F \models G$ (Schlussfolgerung).

Prädikatenlogik verallgemeinert Aussagenlogik und viele der dort gültigen Gesetze.

Was erwartet uns als nächstes?

- Logisches Schließen: (Un)Entscheidbarkeit und Komplexität
- Resolution für Prädikatenlogik