Formale Systeme: Besprechung Musterklausur

Stephan Mennicke

Wissensbasierte Systeme

01. Februar 2024

M1 - Kellerautomaten

a) Geben Sie die formale Definition eines *nichtdeterministischen Kellerautomaten* an. Vervollständigen Sie hierfür den nachfolgenden Text:

   Ein nichtdeterministischer Kellerautomat (PDA) ist ein Sechs-Tupel $\mathcal{M} = \langle \quad, \quad, \quad, \quad, \quad, \quad \rangle$ mit den folgenden Bestandteilen: . . .

b) Welcher andere Akzeptanzbegriff für Kellerautomaten ist laut Anmerkung in der Vorlesung auch möglich?

c) Benennen Sie formal die Unterschiede zwischen deterministischen und nicht-deterministischen Kellerautomaten.

d) Welcher Typ formaler Sprachen wird durch deterministische und welcher durch nichtdeterministische Kellerautomaten charakterisiert? Benennen Sie jeweils eine Sprache genau diesen Typs.

M1 - Kellerautomaten

a) Geben Sie die formale Definition eines *nichtdeterministischen Kellerautomaten* an. Vervollständigen Sie hierfür den nachfolgenden Text:

Ein nichtdeterministischer Kellerautomat (PDA) ist ein Sechs-Tupel
$\mathcal{M} = \langle \quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \quad \rangle$ mit den folgenden Bestandteilen: . . .
$\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, Q_0, F \rangle$ mit den folgenden Bestandteilen:

Q: endliche Menge von Zuständen

Σ: Eingabealphabet

Γ: Kelleralphabet

δ: Übergangsfunktion, eine totale Funktion: $Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon \to 2^{Q \times \Gamma_\varepsilon}$,

Q_0: Menge möglicher Startzustände $Q_0 \subseteq Q$

F: Menge von Endzuständen $F \subseteq Q$

M1 - Kellerautomaten

b) Welcher andere Akzeptanzbegriff für Kellerautomaten ist laut Anmerkung in der Vorlesung auch möglich?

Neben der Akzeptanz über Endzustände in $F \subseteq Q$ gibt es die (äquivalente) Akzeptanz über leeren Keller.

c) Benennen Sie formal die Unterschiede zwischen deterministischen und nicht-deterministischen Kellerautomaten.

Ein deterministischer Kellerautomat (DPDA) ist ein Sechs-Tupel $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F \rangle$ mit den folgenden Bestandteilen:

> δ: Übergangsfunktion, eine partielle Funktion $Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon \to Q \times \Gamma_\varepsilon$, so dass für alle $q \in Q$, $a \in \Sigma$ und $A \in \Gamma$ jeweils nur eines der folgenden definiert ist:
>
> $$\delta(q, a, A) \qquad \delta(q, a, \varepsilon) \qquad \delta(q, \varepsilon, A) \qquad \delta(q, \varepsilon, \varepsilon)$$
>
> q_0: ein Startstand $q_0 \in Q$

M1 - Kellerautomaten

d) Welcher Typ formaler Sprachen wird durch deterministische und welcher durch nichtdeterministische Kellerautomaten charakterisiert? Benennen Sie jeweils eine Sprache genau diesen Typs.

Automat	**Sprachklasse (bzw. Typ)**		**Beispielsprache**
PDA	kontextfrei	Typ 2	$L = \{a^i b^j c^k \mid i \neq j \text{ oder } j \neq k\}$
DPDA	det. kontextfrei	det. Typ 2	$L = \{w \in \Sigma^* \mid \lvert w\rvert_a + \lvert w\rvert_b = \lvert w\rvert_c\}$

Hierbei bezeichnet $|w|_x$ die Anzahl der $x \in \Sigma$ in $w \in \Sigma^*$.

M2 - Pumping-Lemma

a) Formulieren Sie formal präzise das *Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen*. Vervollständigen Sie hierfür den nachfolgenden Text:

   Für jede kontextfreie Sprache L gibt es eine natürliche Zahl $n \geqslant 0$, so dass gilt:

   $\dots$

b) Zeigen Sie mithilfe des *Pumping-Lemmas für reguläre Sprachen*, dass die Sprache $L = \{0^p \mid p \text{ ist eine Primzahl}\}$ nicht regulär ist.

M2 - Pumping-Lemma

a) Formulieren Sie formal präzise das *Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen*. Vervollständigen Sie hierfür den nachfolgenden Text:

Für jede kontextfreie Sprache L gibt es eine natürliche Zahl $n \geqslant 0$, so dass gilt: für jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geqslant n$ gibt es eine Zerlegung $z = uvwxy$ mit $|vx| \geqslant 1$ und $|vwx| \leqslant n$, so dass für jede Zahl $k \geqslant 0$ gilt: $uv^k wx^k y \in L$.

---

b) Zeigen Sie mithilfe des *Pumping-Lemmas für reguläre Sprachen*, dass die Sprache $L = \{0^p \mid p \text{ ist eine Primzahl}\}$ nicht regulär ist.

Annahme: L erfüllt das Pumping-Lemma. D.h. es gibt $n \geqslant 0$, so dass für jedes $z \in L$ mit $|z| \geqslant n$ eine Aufteilung $z = uvw$ existiert mit:

(1) $|v| \geqslant 1$ (2) $|uv| \leqslant n$ (3) $uv^k w \in L$ für jedes $k \geqslant 0$.

Wähle eine Primzahl $\ell > n + 2$. Laut Pump-Eigenschaft finden wir eine Zerlegung von $0^\ell = uvw$, für die insbesondere gilt: $uv^k w \in L$ für $k = |uw|$. Aber $uv^{|uw|}w = 0^{(|v|+1)|uw|} \notin L$. Widerspruch. L ist daher nicht regulär.

M3 - Grammatiken

Gegeben sei die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit

$$V = \{S, A, B\},\ \Sigma = \{a, b\} \text{ und}$$

$$P = \{S \to ASB,\ S \to AB,\ AB \to BA,\ A \to a,\ B \to b\}.$$

a) Von welchem maximalen Typ ist G? Begründen Sie Ihre Antwort.
b) Geben Sie vier Wörter $w_1, w_2, w_3, w_4 \in L(G)$ mit $|w_1| = |w_2| = |w_3| = |w_4| = 4$ an.
c) Beschreiben Sie die durch G erzeugte Sprache $L(G)$ in einer geeigneten Notation.

---

a) G ist vom Typ 1 (kontextsensitiv) und nicht vom Typ 2 (kontextfrei).
b) $w_1 = aabb, w_2 = abab, w_3 = abba, w_4 = baba$
c) $L(G) = \{w \in \{a, b\}^+ \mid |w|_a = |w|_b\}$

M4 - Grammatiken: CNF/CYK

Gegeben sei das Wort $w = abac$ und die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit

$$V = \{S, A, B, C, D\},\ \Sigma = \{a, b, c\} \text{ und}$$

$$P = \{S \to AB,\ A \to BA,\ A \to a, B \to AC,\ B \to BB,\ B \to b, C \to c,\ D \to AB\}.$$

a) Ist die Grammatik G in *Chomsky*-Normalform? Begründen Sie Ihre Antwort.
b) Entscheiden Sie mithilfe des Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus, ob $w \in L(G)$ gilt. Transformieren Sie, falls notwendig, G in *Chomsky*-Normalform.
c) Entfernen Sie in G, sofern vorhanden, nichtterminierende und nichterreichbare Symbole. Begründen Sie Ihr Vorgehen.

---

a) ja. Jede Regel ist von der Form $A \to BC$ oder $A \to x$ ($A, B, C \in V, x \in \Sigma$).
b) ...
c) D ist nicht erreichbar, $G' = (V', \Sigma, P', S)$ mit $V' = \{S, A, B, C\}$ und
$P' = \{S \to AB, A \to BA, A \to a, B \to AC, B \to BB, B \to b, C \to c\}$
hat weder nichtterminierende noch nichterreichbare Symbole.

M4 - Grammatiken: CNF/CYK

Gegeben sei das Wort $w = abac$ und die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit

$$V = \{S, A, B, C, D\},\ \Sigma = \{a, b, c\} \text{ und}$$

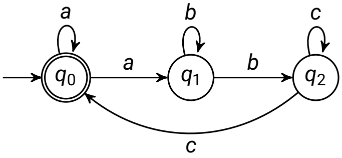
$$P = \{S \to AB,\ A \to BA,\ A \to a, B \to AC,\ B \to BB,\ B \to b, C \to c,\ D \to AB\}.$$

a	$\{A\}$	$\{D, S\}$	$\varnothing$	$\{D, S\}$
b		$\{B\}$	$\{A\}$	$\{B\}$
a			$\{A\}$	$\{B\}$
c				$\{C\}$
	a	b	a	c

Damit ist $w = abac \in L$.

M5 - NFA/Reguläre Ausdrücke/DFA

Gegeben sei der NFA $\mathcal{M} = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, \delta, \{q_0\}, \{q_0\})$ mit δ:

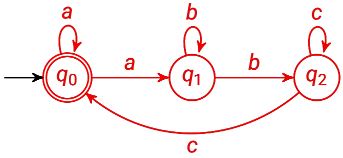


a) Berechnen Sie mithilfe des Arden-Lemmas einen regulären Ausdruck α mit $L(\alpha) = L(\mathcal{M})$.

b) Konstruieren Sie einen zu $\mathcal{M}$ äquivalenten DFA $\mathcal{M}'$. Verwenden Sie dazu die Potenzmengenkonstruktion aus der Vorlesung. Stellen Sie dabei sicher, dass der konstruierte Automat keine unerreichbaren Zustände enthält.

M5 - NFA/Reguläre Ausdrücke/DFA

Gegeben sei der NFA $\mathcal{M} = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, \delta, \{q_0\}, \{q_0\})$ mit δ:

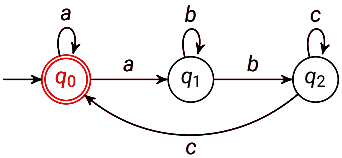


a) Berechnen Sie mithilfe des Arden-Lemmas einen regulären Ausdruck α mit $L(\alpha) = L(\mathcal{M})$.

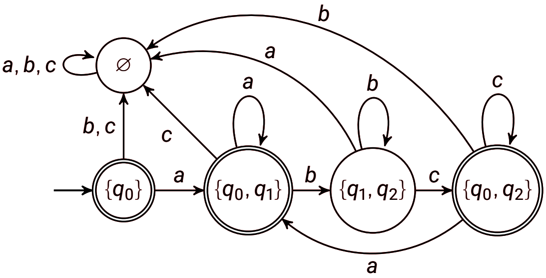
$$
\begin{array}{lclcl}
\alpha_0 & \equiv & a\alpha_0 \mid a\alpha_1 \mid \varepsilon & \equiv & a\alpha_0 \mid ab^+c^+\alpha_0 \mid \varepsilon \quad \equiv \quad (a \mid ab^+c^+)^* \\
\alpha_1 & \equiv & b\alpha_1 \mid b\alpha_2 & \equiv & b^*b\alpha_2 \equiv b^+\alpha_2 \\
\alpha_2 & \equiv & c\alpha_2 \mid c\alpha_0 & \equiv & c^*c\alpha_0 \equiv c^+\alpha_0
\end{array}
$$

M5 - NFA/Reguläre Ausdrücke/DFA

Gegeben sei der NFA $\mathcal{M} = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, \delta, \{q_0\}, \{q_0\})$ mit δ:



b) DFA $\mathcal{M}'$:



M6 - Nerode/Minimalautomat

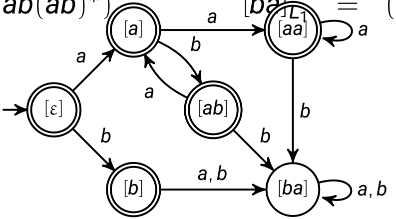
Geben Sie die Nerode-Äquivalenzklassen für die nachfolgenden Sprachen an und geben Sie den Minimalautomaten für L_1 an.

$$L_1 = L((ab)^* a^* \mid b) \quad \text{und} \quad L_2 = \{w \in \{a,b\}^* \mid w = w^R\}$$

Für L_1 lauten die Äquivalenzklassen:

$$\begin{aligned} [\varepsilon]_{L_1} &= L(\varepsilon) & \qquad [a]_{L_1} &= L((ab)^* a) \\ [b]_{L_1} &= L(b) & \qquad [aa]_{L_1} &= L((ab)^* aaa^*) \\ [ab]_{L_1} &= L(ab(ab)^*) & \qquad [ba]_{L_1} &= (a,b)^* \setminus L_1 \end{aligned}$$

Minimalautomat:



Für L_2 lauten die Äquivalenzklassen: $[w]_{L_2} = \{w\}$ mit $w \in \{a,b\}^*$.

D.h. jedes Wort aus $\{a,b\}^*$ bildet eine eigene Äquivalenzklasse.

Damit ist der Nerode-Index von L_2 unendlich, d.h. die Sprache L_2 ist nicht regulär.

M6 - Nerode/Minimalautomat

Beweis:

Angenommen, es gibt zwei Wörter $v, w \in [v]$ mit $v \neq w$ und $|v| \geqslant |w|$.

Falls $|v| = |w|$, so ist $vv^R \in L_2$, aber $wv^R \notin L_2$, also $v \not\sim_{L_2} w$.

Ansonsten gilt $|v| > |w|$.

Falls $wv^R \notin L_2$ ist, so gilt $v \not\sim_{L_2} w$, denn $vv^R \in L_2$.

Ist auch $wv^R \in L_2$, betrachte die Zerlegung $wv^R = wxyz$, wobei $|wx| = |z|$ und $1 \leqslant |y| \leqslant 2$.

Insbesondere ist $(wxy)^R = y^R(wx)^R = yz$, also $y^R = y$.

Betrachte $wx\bar{y}z$, wobei $\bar{y}$ aus y entsteht, indem jedes a durch b (und umgekehrt) ersetzt wird.

Dann ist auch $wx\bar{y}z \in L_2$.

Aber $v^R = xyz \neq x\bar{y}z$, also ist $vx\bar{y}z \notin L_2$.

Damit $v \not\sim_{L_2} w$.

M7 - Sprachoperatoren und Sprachabschluss

Seien Σ ein Alphabet, $w \in \Sigma^*$ und $a \in \Sigma$. Eine *Injektion von a in w* ist ein Wort, das aus w entsteht, wenn ein a an eine beliebige Stelle in w eingefügt wird. Wir definieren die *Injektionen von a in w* als

$$w\|_a := \{uav \mid \exists u, v \in \Sigma^* : w = uv\}.$$

Der Operator $\|_a$ ($a \in \Sigma$) ist auf Wörtern definiert und wird auf natürliche Weise auf Sprachen $L \subseteq \Sigma^*$ erweitert durch:

$$L\|_a := \bigcup_{w \in L} w\|_a.$$

a) Seien $\Sigma = \{a, b, c\}$ und $L = \{a^m b^n c^m \mid m > 0, n \geqslant 0\}$. Bestimmen Sie drei verschiedene Wörter $w_1, w_2, w_3 \in (L\|_b) \setminus L$.

b) Die regulären Sprachen sind unter $\|_a$ (für alle $a \in \Sigma$) abgeschlossen. Begründen Sie die Korrektheit dieser Aussage.

M7 - Sprachoperatoren und Sprachabschluss

Seien Σ ein Alphabet, $w \in \Sigma^*$ und $a \in \Sigma$. Eine *Injektion von a in w* ist ein Wort, das aus w entsteht, wenn ein a an eine beliebige Stelle in w eingefügt wird. Wir definieren die *Injektionen von a in w* als

$$w\|_a := \{uav \mid \exists u, v \in \Sigma^* : w = uv\}.$$

Der Operator $\|_a$ ($a \in \Sigma$) ist auf Wörtern definiert und wird auf natürliche Weise auf Sprachen $L \subseteq \Sigma^*$ erweitert durch:

$$L\|_a := \bigcup_{w \in L} w\|_a.$$

a) Seien $\Sigma = \{a, b, c\}$ und $L = \{a^m b^n c^m \mid m > 0, n \geqslant 0\}$. Bestimmen Sie drei verschiedene Wörter $w_1, w_2, w_3 \in (L\|_b) \setminus L$.

   $w_1 = bac, w_2 = acb, w_3 = aabac$

   Nicht korrekt wären: $w_4 = abc$ or $w_5 = abbc$, obwohl $w_4 \in ac\|_b$ und $w_5 \in abc\|_b$.

M7 - Sprachoperatoren und Sprachabschluss

Seien Σ ein Alphabet, $w \in \Sigma^*$ und $a \in \Sigma$. Eine *Injektion von a in w* ist ein Wort, das aus w entsteht, wenn ein a an eine beliebige Stelle in w eingefügt wird. Wir definieren die *Injektionen von a in w* als

$$w\|_a := \{uav \mid \exists u, v \in \Sigma^* : w = uv\}.$$

Der Operator $\|_a$ ($a \in \Sigma$) ist auf Wörtern definiert und wird auf natürliche Weise auf Sprachen $L \subseteq \Sigma^*$ erweitert durch:

$$L\|_a := \bigcup_{w \in L} w\|_a.$$

b) Die regulären Sprachen sind unter $\|_a$ (für alle $a \in \Sigma$) abgeschlossen. Begründen Sie die Korrektheit dieser Aussage.

Wir zeigen für eine (beliebige) reguläre Sprache L und ein Symbol $a \in \Sigma$, dass $L\|_a$ ebenfalls regulär ist.

M7 - Sprachoperatoren und Sprachabschluss

Wir zeigen für eine (beliebige) reguläre Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ und ein Symbol $a \in \Sigma$, dass $L\|_a$ ebenfalls regulär ist.

Vorüberlegungen:

Wir haben L, eine reguläre Sprache, gegeben.

Auf L direkt argumentieren?

Können L auch als

(i) reguläre Grammatik,
(ii) DFA/NFA und
(iii) regulären Ausdruck annehmen.

Es genügt, für eine gewählte Repräsentation zu zeigen, dass diese so umgeformt werden kann, dass

(1) die Sprache $L\|_a$ beschrieben wird und
(2) das Resultat der Umformung die Repräsentation nicht verlässt.

Lassen Sie uns *programmieren*, also mit Automaten arbeiten.

M7 - Sprachoperatoren und Sprachabschluss

Wir zeigen für eine (beliebige) reguläre Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ und ein Symbol $a \in \Sigma$, dass $L\|_a$ ebenfalls regulär ist.

Beweis:

Da L regulär ist, existiert ein DFA $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ mit $\mathbf{L}(\mathcal{M}) = L$.

Wir konstruieren einen NFA $\mathcal{M}'$ ausgehend von $\mathcal{M}$ wie folgt:

(i) kopiere alle Zustände und Übergänge, sodass $\mathcal{M}'$ aus den Zuständen und Übergängen von $\mathcal{M}$ besteht und einer Kopie von $\mathcal{M}$.

(ii) Startzustand bleibt q_0. Endzustandsmenge wird die Kopie von F.

(iii) Führe zwischem jedem (Original-)Zustand $q \in Q$ und seiner Kopie $\widehat{q}$ einen a-Übergang ein.

$\mathbf{L}(\mathcal{M}') \subseteq L\|_a$

Jeder akzeptierende Lauf ρ in $\mathcal{M}'$ für ein Wort w muss per Konstruktion einen der neuen a-Übergänge beinhalten.

Für Zustände $q, q' \in Q$ und $q_f \in F$ muss $\rho = q_0 \cdots q\widehat{q}\widehat{q'} \cdots \widehat{q}_f$.

Entfernen wir $\widehat{q}$ sowie $\widehat{\cdot}$ von den übrigen Zuständen, erhalten wir einen akzeptierenden Lauf ρ' von $\mathcal{M}$ für ein Wort $v \in \mathbf{L}(\mathcal{M})$.

Es gilt $w \in v\|_a$, also $w \in L\|_a$.

M7 - Sprachoperatoren und Sprachabschluss

Wir zeigen für eine (beliebige) reguläre Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ und ein Symbol $a \in \Sigma$, dass $L\|_a$ ebenfalls regulär ist.

Beweis:

Da L regulär ist, existiert ein DFA $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$ mit $\mathbf{L}(\mathcal{M}) = L$.

Wir konstruieren einen NFA $\mathcal{M}'$ ausgehend von $\mathcal{M}$ wie folgt:

(i) kopiere alle Zustände und Übergänge, sodass $\mathcal{M}'$ aus den Zuständen und Übergängen von $\mathcal{M}$ besteht und einer Kopie von $\mathcal{M}$.

(ii) Startzustand bleibt q_0. Endzustandsmenge wird die Kopie von F.

(iii) Führe zwischem jedem (Original-)Zustand $q \in Q$ und seiner Kopie $\widehat{q}$ einen a-Übergang ein.

$\mathbf{L}(\mathcal{M}') \supseteq L\|_a$

Sei $w \in L\|_a$.

Dann gibt es ein Wort $v \in L$ mit $v = u_1u_2$ und $w = u_1au_2$.

Es gibt einen akzeptierenden Lauf ρ in $\mathcal{M}$ für v mit $\rho = \rho_1\rho_2$.

Sei q der letzte Zustand von ρ_1 und sei $\widehat{\rho_2}$ der Lauf, der aus ρ_2 entsteht, indem alle Zustände des Laufs durch ihre Kopien ausgetauscht werden.

Dann ist $\rho' = \rho_1\widehat{q}\widehat{\rho_2}$ ein akzeptierender Lauf für w in $\mathcal{M}'$. $w \in \mathbf{L}(\mathcal{M}')$.

M7 - Sprachoperatoren und Sprachabschluss

Wir zeigen für eine (beliebige) reguläre Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ und ein Symbol $a \in \Sigma$, dass $L\|_a$ ebenfalls regulär ist.

Beweis:

Da L regulär ist, existiert ein DFA $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$ mit $\mathbf{L}(\mathcal{M}) = L$.

Wir konstruieren einen NFA $\mathcal{M}'$ ausgehend von $\mathcal{M}$ wie folgt:

(i) kopiere alle Zustände und Übergänge, sodass $\mathcal{M}'$ aus den Zuständen und Übergängen von $\mathcal{M}$ besteht und einer Kopie von $\mathcal{M}$.

(ii) Startzustand bleibt q_0. Endzustandsmenge wird die Kopie von F.

(iii) Führe zwischem jedem (Original-)Zustand $q \in Q$ und seiner Kopie $\widehat{q}$ einen a-Übergang ein.

Es gilt also $\mathbf{L}(\mathcal{M}') = L\|_a$.

Da $\mathcal{M}'$ ein NFA ist, ist $L\|_a$ somit regulär.

M8 - Resolution (nicht Revolution)

a) Zeigen Sie, dass die Formel

$$F := \neg b \vee \Big((\neg a \vee \neg c \vee d) \wedge (\neg d \vee (a \wedge \neg c)) \Big)$$

äquivalent zu einer Horn-Formel ist.

b) Nutzen Sie das Resolutionsverfahren, um zu zeigen, dass

$$\{ (\neg a \vee b), (\neg a \vee d), (\neg b \vee \neg d \vee c), (\neg d \vee \neg c \vee \neg a) \} \models \neg a$$

gilt.

c) Begründen Sie, warum die Hyperresolution für Horn-Formeln immer in polynomieller Zeit terminiert.

M8 - Resolution (nicht Revolution)

a) Zeigen Sie, dass die Formel

$$F := \neg b \lor \big((\neg a \lor \neg c \lor d) \land (\neg d \lor (a \land \neg c))\big)$$

äquivalent zu einer Horn-Formel ist.

Umwandlung in KNF ergibt:

$$\begin{aligned}
F &= \neg b \lor ((\neg a \lor \neg c \lor d) \land (\neg d \lor (a \land \neg c))) \\
&\equiv (\neg a \lor \neg b \lor \neg c \lor d) \land (\neg b \lor \neg d \lor (a \land \neg c)) \\
&\equiv (\neg a \lor \neg b \lor \neg c \lor d) \land (a \lor \neg b \lor \neg d) \land (\neg b \lor \neg c \lor \neg d)
\end{aligned}$$

In keiner Klausel kommt mehr als ein positives Literal vor. F ist damit äquivalent zu einer Horn-Formel.

Tatsächlich gilt sogar $F \equiv (\neg a \lor \neg b \lor \neg c) \land (a \lor \neg b \lor \neg d)$.

M8 - Resolution (nicht Revolution)

b) Nutzen Sie das Resolutionsverfahren, um zu zeigen, dass gilt:

$$\{(\neg a \lor b), (\neg a \lor d), (\neg b \lor \neg d \lor c), (\neg d \lor \neg c \lor \neg a)\} \models \neg a$$

(1)	$\{\neg a, b\}$		(2)	$\{\neg a, d\}$	
(3)	$\{\neg b, \neg d, c\}$		(4)	$\{\neg d, \neg c, \neg a\}$	
(5)	$\{a\}$		(6)	$\{b\}$	$(1) + (5)$
(7)	$\{d\}$	$(2) + (5)$	(8)	$\{\neg d, c\}$	$(3) + (6)$
(9)	$\{c\}$	$(7) + (8)$	(10)	$\{\neg c, \neg a\}$	$(4) + (7)$
(11)	$\{\neg a\}$	$(9) + (10)$	(12)	$\emptyset$	$(5) + (11)$

$\{(\neg a \lor b), (\neg a \lor d), (\neg b \lor \neg d \lor c), (\neg d \lor \neg c \lor \neg a), (\neg\neg a)\}$ ist unerfüllbar. Also gilt $\neg a$ in allen Modellen von $\{(\neg a \lor b), (\neg a \lor d), (\neg b \lor \neg d \lor c), (\neg d \lor \neg c \lor \neg a)\}$. Damit gilt die Behauptung.

M8 - Resolution (nicht Revolution)

c) Begründen Sie, warum die Hyperresolution für Horn-Formeln immer in polynomieller Zeit terminiert.

Jede Resolvente ist von der Form $\top \to p$ für ein Atom p.

Für eine feste Formel φ gibt es nur linear viele Atome p, die in φ vorkommen.

Es gibt also nur linear viele solcher Resolventen.

Ein Hyperresolutionsschritt ist in polynomieller Zeit möglich.

Die Hyperresolution terminiert in polynomieller Zeit.