TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Informatik, Institut für Theoretische Informatik, Professur Wissensbasierte Systeme

Prof. Dr. Markus Krötzsch Dr. Stephan Mennicke

Übungen zur Lehrveranstaltung

Theoretische Informatik und Logik

Sommersemester 2024

3. Übungsblatt

29. April–05. Mai 2024

Die folgenden Aufgaben werden nicht in den Übungen besprochen und dienen der Selbstkontrolle.

Aufgabe E

Geben Sie eine Turing-Maschine $\mathcal{A}_{\mathsf{mod2}}$ an, die die Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = (x \bmod 2)$ berechnet. Stellen Sie dabei die Zahlen in unärer Kodierung dar.

Aufgabe F

Es sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = \lfloor \log_{10}(x) \rfloor$. Geben Sie ein WHILE-Programm an, welches f berechnet.

Aufgabe G

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Die Menge der Instanzen des Postschen Korrespondenzproblems, welche eine Lösung haben, ist semi-entscheidbar.

b) Das Postsche Korrespondenzproblem ist bereits über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ nicht entscheidbar.

c) Es ist entscheidbar, ob eine Turingmaschine nur Wörter akzeptiert, die Palindrome sind. (Ein Palindrom ist ein Wort $w = a_1 \dots a_n$ mit $a_1 \dots a_n = a_n \dots a_1$.)

d) $\mathbf{P}_{\mathsf{halt}}$ ist semi-entscheidbar.

e) Es ist nicht entscheidbar, ob die von einer deterministischen Turing-Maschine berechnete Funktion total ist.

f) Es gibt reguläre Sprachen, die nicht semi-entscheidbar sind.

Aufgabe 1

Besitzen folgende Instanzen P_i des Postschen Korrespondenzproblems Lösungen? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) $P_1 = \begin{bmatrix} a \\ aaa \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} abaaa \\ ab \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ab \\ b \end{bmatrix}$

b) $P_2 = \begin{bmatrix} ab \\ aba \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} baa \\ aa \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} aba \\ baa \end{bmatrix}$

c) $P_3 = \begin{bmatrix} bba \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ba \\ baa \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ba \\ aba \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ab \\ bba \end{bmatrix}$

(Für einige Teilaufgaben ist die Verwendung eines Computers sinnvoll.)

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass das Postsche Korrespondenzproblem über einem einelementigen Alphabet entscheidbar ist.

Aufgabe 3

Es sei

$$\mathbf{T} := \{\mathsf{enc}(\mathcal{M}) \mid \mathcal{M} \text{ ist eine Turing-Maschine, welche } w^{\mathcal{R}} \text{ akzeptiert, falls sie } w \text{ akzeptiert}\},$$

wobei $w^{\mathcal{R}}$ das zu w umgekehrte Wort ist. Zeigen Sie, dass $\mathbf{T}$ nicht entscheidbar ist.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass weder das Äquivalenzproblem $\mathbf{P}_{\mathsf{äquiv}}$ für Turing-Maschinen noch dessen Komplement $\overline{\mathbf{P}_{\mathsf{äquiv}}}$ semi-entscheidbar ist, wobei

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\mathsf{äquiv}} &:= \{\mathsf{enc}(\mathcal{M}_1)\#\#\mathsf{enc}(\mathcal{M}_2) \mid L(\mathcal{M}_1) = L(\mathcal{M}_2)\}, \\ \overline{\mathbf{P}}_{\mathsf{äquiv}} &:= \{\mathsf{enc}(\mathcal{M}_1)\#\#\mathsf{enc}(\mathcal{M}_2) \mid L(\mathcal{M}_1) \neq L(\mathcal{M}_2)\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie dazu, dass $\mathbf{P}_{\mathsf{halt}} \leq_m \mathbf{P}_{\mathsf{äquiv}}$ und $\mathbf{P}_{\mathsf{halt}} \leq_m \overline{\mathbf{P}}_{\mathsf{äquiv}}$ gilt. Weshalb zeigt dies die Aussage?