Theoretische Informatik und Logik
4. Übungsblatt

Sommersemester 2021

Die folgende Aufgabe wird nicht in den Übungen besprochen und dient der Selbstkontrolle.

Aufgabe G

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Die Menge der Instanzen des Postschen Korrespondenzproblems, welche eine Lösung haben, ist semi-entscheidbar.

b) Das Postsche Korrespondenzproblem ist bereits über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ nicht entscheidbar.

c) Es ist entscheidbar, ob eine Turingmaschine nur Wörter akzeptiert, die Palindrome sind. (Ein Palindrom ist ein Wort $w = a_1 \dots a_n$ mit $a_1 \dots a_n = a_n \dots a_1$.)

d) $\mathbf{P}_{\mathsf{halt}}$ ist semi-entscheidbar.

e) Es ist nicht entscheidbar, ob die von einer deterministischen Turing-Maschine berechnete Funktion total ist.

f) Es gibt reguläre Sprachen, die nicht semi-entscheidbar sind.

Aufgabe 1

Besitzen folgende Instanzen P_i des Postschen Korrespondenzproblems Lösungen oder nicht? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) $P_1 = \begin{bmatrix} a \\ aaa \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} abaaa \\ ab \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ab \\ b \end{bmatrix}$

b) $P_2 = \begin{bmatrix} ab \\ aba \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} baa \\ aa \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} aba \\ baa \end{bmatrix}$

c) $P_3 = \begin{bmatrix} bba \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ba \\ baa \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ba \\ aba \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ab \\ bba \end{bmatrix}$

(Für einige Teilaufgaben ist die Verwendung eines Computers sinnvoll: Realisieren Sie hierfür in einer Programmiersprache Ihrer Wahl ein Programm, welches für lösbare Instanzen des PKP in der Lage ist, eine (kürzeste) Lösung zu berechnen.)

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass das Postsche Korrespondenzproblem über einem einelementigen Alphabet entscheidbar ist.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass folgendes Problem unentscheidbar ist: Gegeben eine Turing-Maschine $\mathcal{M}$ und ein $k \in \mathbb{N}$, kann die Sprache $L(\mathcal{M})$ durch eine Turing-Maschine mit höchstens k Zuständen erkannt werden?

Zeigen Sie dazu, dass die Menge

$$T_k := \{\mathsf{enc}(\mathcal{M}) \mid L(\mathcal{M}) \text{ wird von einer TM mit höchstens } k \text{ Zuständen erkannt}\}$$

bereits für $k = 1$ nicht entscheidbar ist. Warum zeigt dies die ursprüngliche Behauptung?

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass weder das Äquivalenzproblem $\mathbf{P}_{\mathsf{äquiv}}$ für Turing-Maschinen noch dessen Komplement $\overline{\mathbf{P}}_{\mathsf{äquiv}}$ semi-entscheidbar ist, wobei

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{\mathsf{äquiv}} &:= \{\mathsf{enc}(\mathcal{M}_1)\#\#\,\mathsf{enc}(\mathcal{M}_2) \mid L(\mathcal{M}_1) = L(\mathcal{M}_2)\},\\ \overline{\mathbf{P}}_{\mathsf{äquiv}} &:= \{\mathsf{enc}(\mathcal{M}_1)\#\#\,\mathsf{enc}(\mathcal{M}_2) \mid L(\mathcal{M}_1) \neq L(\mathcal{M}_2)\}.\end{aligned}$$

Zeigen Sie dazu, dass $\mathbf{P}_{\mathsf{halt}} \leq_m \mathbf{P}_{\mathsf{äquiv}}$ und $\mathbf{P}_{\mathsf{halt}} \leq_m \overline{\mathbf{P}}_{\mathsf{äquiv}}$ gilt. Weshalb zeigt dies die Aussage?