TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

FORMALE SYSTEME

21. Vorlesung: Aussagenlogik

Markus Krötzsch

Professur für Wissensbasierte Systeme

TU Dresden, 8. Januar 2024

Logik für InformatikerInnen

Warum?

Logik für InformatikerInnen: Darum (1)

$$\frac{\text{Logik}}{\text{Informatik}} = \frac{\text{Analysis}}{\text{Ingenieurwesen}}$$

„Wer rechnende Systeme verstehen und konstruieren will, der benötigt passende mathematische Modelle.
Dieser Weg führt oftmals zur Logik.“

- Modellierung von Programmlogik und logischen Schaltungen
- Berechnung praktisch relevanter Eigenschaften durch logisches Schließen
- Hauptanwendung: Verifikation von Systemen

Logik = Wissenschaft vom folgerichtigen Denken

„Wer intelligente Software entwickeln will, der muss logische
Schlussfolgerungen algorithmisch umsetzen.
Die Logik liefert die nötigen Methoden.“

- Kodierung von gültigen Zusammenhängen und Regeln
- Logisches Schließen als Simulation von intelligentem Denken
- Hauptanwendung: Künstliche Intelligenz

Logisches Schließen = Problemlösen

„Bedeutende Klassen von (schweren) Problemen lassen sich
durch logische Schlussfolgerung lösen.
Algorithmen aus der Logik sind in vielen anderen Bereichen anwendbar."

- Logik als Spezifikationssprache für komplexe Probleme
- Logisches Schließen als Suche nach zulässigen Lösungen
- Anwendungen: Constraint-Satisfaction-Probleme und verwandte Optimierungsaufgaben

Logiken = Beschreibungssprachen

„Überall wo Informationen maschinell kodiert werden und wo exakt
spezifiziert ist, was eine Anwendung
aus dieser Kodierung ableiten darf,
hat man es mit einer Art Logik zu tun."

- Logik als Oberbegriff exakt spezifizierter Datenformate
- Schlussfolgerung zur Interpretation/Analyse/Optimierung
- Anwendungen: Wissensrepräsentation und Datenbanken

Was ist Logik?

Was ist Logik?

„Logik“ ist ein allgemeiner Oberbegriff für viele mathematische und technische Formalismen, gekennzeichnet durch:

- Syntax: Sprache einer Logik (normalerweise Formeln mit logischen Operatoren)
- Semantik: Definition der Bedeutung (Worauf beziehen sich die Formeln? Wann ist eine Formel wahr oder falsch?)

Was ist Logik?

„Logik“ ist ein allgemeiner Oberbegriff für viele mathematische und technische Formalismen, gekennzeichnet durch:

- Syntax: Sprache einer Logik (normalerweise Formeln mit logischen Operatoren)
- Semantik: Definition der Bedeutung (Worauf beziehen sich die Formeln? Wann ist eine Formel wahr oder falsch?)

Typische Zielstellung: Logische Schlussfolgerung

- Welche Schlüsse kann man aus einer gegebenen (Menge von) Formel(n) ziehen?
- Spezifikation der korrekten Schlussfolgerungen sollte sich aus Semantik ergeben
- Praktische Berechnung von Schlussfolgerungen ist oft kompliziert

Viele Logiken

Es gibt sehr viele Logiken, z.B.

- Aussagenlogik
- Prädikatenlogik (erster Stufe)
- Prädikatenlogik zweiter Stufe
- Beschreibungslogiken (Wissensrepräsentation und KI)
- Temporallogiken (z.B. Verifikation zeitlicher Abläufe)
- Logikprogramme (Answer Set Programming, Prolog, . . .)
- Nichtklassische Logiken (z.B. intuitionistische Logik)
- Mehrwertige Logiken (z.B. probabilistische Logik)
- . . . und viele andere mehr

$\leadsto$ In dieser Vorlesung lernen wir zunächst Aussagenlogik kennen

(Mehr gibt es in der Vorlesung „Theoretische Informatik und Logik“)

Aussagenlogik

Aussagenlogik

Die Aussagenlogik untersucht logische Verknüpfungen von atomaren Aussagen.

Atomare Aussagen sind Behauptungen, die wahr oder falsch sein können, z.B.:

- A1 „Morgen schneit es.“
- A2 „Wir werden einen Schneemann bauen.“
- B1 „Die Vorstellung von der globalen Erderwärmung wurde von den Chinesen erfunden.“
- B2 „Die Temperatur der Ozeane ist seit 1998 in unverminderter Geschwindigkeit angestiegen.“
- C1 „Typ-2-Sprachen sind unter Vereinigung abgeschlossen.“
- C2 „Typ-2-Sprachen sind unter Komplement abgeschlossen.“
- C3 „Typ-2-Sprachen sind unter Schnitt abgeschlossen.“

Aussagen verknüpfen

Atomare Aussagen können mithilfe logischer Junktoren verknüpft werden:

- $A1 \to A2$: „Wenn es morgen schneit, dann werden wir einen Schneemann bauen.“
- $A1 \vee \neg A1$: „Entweder schneit es morgen oder nicht.“
- $B1 \to \neg B2$: „Falls die Chinesen die globale Erwärmung erfunden haben, dann steigt die Temperatur der Ozeane nicht unvermindert an.“
- $(C1 \wedge C2) \to C3$: „Sind Typ-2-Sprachen unter Vereinigung und Komplement abgeschlossen, dann sind sie auch unter Schnitt abgeschlossen.“

Logisches Schließen

Wenn einige Formeln als wahr angenommen werden, dann kann die Wahrheit anderer Formeln daraus abgeleitet werden.

Beispiele:

- Aus B2 und B1 $\to$ ¬B2 folgt ¬B1
- Aus C1, ¬C3 und $(C1 \wedge C2) \to$ C3 folgt ¬C2
- Aus A1 $\to$ A2 und ¬A1 folgt nicht ¬A2

Logisches Schließen

Wenn einige Formeln als wahr angenommen werden, dann kann die Wahrheit anderer Formeln daraus abgeleitet werden.

Beispiele:

- Aus B2 und B1 $\to \neg$B2 folgt $\neg$B1
- Aus C1, $\neg$C3 und (C1 $\wedge$ C2) $\to$ C3 folgt $\neg$C2
- Aus A1 $\to$ A2 und $\neg$A1 folgt nicht $\neg$A2

Die Gültigkeit bestimmter Schlussfolgerungen hat nichts mit Schneemännern, Erderhitzung oder Typ-2-Sprachen zu tun!
Sie ist eine rein logische Konsequenz.

Beispiel: Logelei

Anna behauptet: „Barbara lügt!“

Barbara behauptet: „Chris lügt!“

Chris behauptet: „Anna und Barbara lügen!“

Wer lügt?

(Und wie kann man das beweisen?)

Aussagenlogik: Syntax

Wir betrachten eine abzählbar unendliche Menge **P** von atomaren Aussagen (auch bekannt als: aussagenlogische Variablen, Propositionen oder schlicht Atome)

Die Menge der aussagenlogischen Formeln ist induktiv[a] definiert:

- Jedes Atom $p \in \mathbf{P}$ ist eine aussagenlogische Formel
- Wenn F und G aussagenlogische Formeln sind, so auch:
  - $\neg F$: Negation, „nicht F"
  - $(F \wedge G)$: Konjunktion, „F und G"
  - $(F \vee G)$: Disjunktion, „F oder G"
  - $(F \to G)$: Implikation, „F impliziert G"
  - $(F \leftrightarrow G)$: Äquivalenz, „F ist äquivalent zu G"

[a] Das bedeutet: Die Definition ist selbstbezüglich und soll die kleinste Menge an Formeln beschreiben, die alle Bedingungen erfüllen.

Wir verzichten hier oft auf „aussagenlogisch" und sprechen z.B. einfach von „Formeln".

Beispiele

Die folgenden Ausdrücke sind aussagenlogische Formeln:

- p
- $((p \to q) \to p) \to p$
- $\neg\neg\neg p$

Die folgenden Ausdrücke sind keine aussagenlogischen Formeln:

- $p \wedge q \vee r$ (fehlende Klammern)

  Vereinfachung: Äußere Klammern dürfen wegfallen, d.h. wir erlauben z.B. $p \to q$ anstatt auf $(p \to q)$ zu bestehen.

- $(p \leftarrow q)$ (Operator $\leftarrow$ undefiniert)
- $\overline{p \wedge q}$ (wir verwenden $^{-}$ nicht als Negation)

Teilformeln

Wir können Formeln als Wörter über (endlichen Teilmengen aus) dem unendlichen Alphabet $\mathbf{P} \cup \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,)\}$ sehen:

$$\mathsf{F} \to \mathbf{P} \mid \neg\mathsf{F} \mid (\mathsf{F}\wedge\mathsf{F}) \mid (\mathsf{F}\vee\mathsf{F}) \mid (\mathsf{F}\rightarrow\mathsf{F}) \mid (\mathsf{F}\leftrightarrow\mathsf{F})$$

Teilformeln

Wir können Formeln als Wörter über (endlichen Teilmengen aus) dem unendlichen Alphabet $\mathbf{P} \cup \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,)\}$ sehen:

$$\mathsf{F} \rightarrow \mathbf{P} \mid \neg\mathsf{F} \mid (\mathsf{F}\wedge\mathsf{F}) \mid (\mathsf{F}\vee\mathsf{F}) \mid (\mathsf{F}\rightarrow\mathsf{F}) \mid (\mathsf{F}\leftrightarrow\mathsf{F})$$

Eine Teilformel ist ein Teilwort (Infix) einer Formel, welches selbst eine Formel ist. Teilformeln werden auch Unterformeln genannt.

Teilformeln

Wir können Formeln als Wörter über (endlichen Teilmengen aus) dem unendlichen Alphabet $\mathbf{P} \cup \{\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow, (,)\}$ sehen:

$$\mathsf{F} \to \mathbf{P} \mid \neg\mathsf{F} \mid (\mathsf{F}\wedge\mathsf{F}) \mid (\mathsf{F}\vee\mathsf{F}) \mid (\mathsf{F}\to\mathsf{F}) \mid (\mathsf{F}\leftrightarrow\mathsf{F})$$

Eine Teilformel ist ein Teilwort (Infix) einer Formel, welches selbst eine Formel ist. Teilformeln werden auch Unterformeln genannt.

Alternativ kann man Teilformeln auch rekursiv definieren:

Die Menge $\mathsf{Sub}(F)$ der Teilformeln einer Formel F ist definiert als:

$$\mathsf{Sub}(F) = \begin{cases} \{F\} & \text{falls } F \in \mathbf{P} \\ \{\neg G\} \cup \mathsf{Sub}(G) & \text{falls } F = \neg G \\ \{(G_1 \wedge G_2)\} \cup \mathsf{Sub}(G_1) \cup \mathsf{Sub}(G_2) & \text{falls } F = (G_1 \wedge G_2) \\ \{(G_1 \vee G_2)\} \cup \mathsf{Sub}(G_1) \cup \mathsf{Sub}(G_2) & \text{falls } F = (G_1 \vee G_2) \\ \{(G_1 \to G_2)\} \cup \mathsf{Sub}(G_1) \cup \mathsf{Sub}(G_2) & \text{falls } F = (G_1 \to G_2) \\ \{(G_1 \leftrightarrow G_2)\} \cup \mathsf{Sub}(G_1) \cup \mathsf{Sub}(G_2) & \text{falls } F = (G_1 \leftrightarrow G_2) \end{cases}$$

Semantik

Was bedeutet eine aussagenlogische Formel?

Semantik

Was bedeutet eine aussagenlogische Formel?

- Atome an sich bedeuten zunächst nichts
  $\leadsto$ sie können einfach wahr oder falsch sein

Semantik

Was bedeutet eine aussagenlogische Formel?

- Atome an sich bedeuten zunächst nichts
  $\leadsto$ sie können einfach wahr oder falsch sein
- Je nachdem, welche Atome wahr sind und welche falsch, ergeben sich verschiedene „Interpretationen“
  $\leadsto$ dargestellt durch Wertzuweisungen
  (Funktionen von **P** nach $\{1, 0\}$; 1=„wahr“ und 0=„falsch“)

Semantik

Was bedeutet eine aussagenlogische Formel?

- Atome an sich bedeuten zunächst nichts
  $\rightsquigarrow$ sie können einfach wahr oder falsch sein
- Je nachdem, welche Atome wahr sind und welche falsch, ergeben sich verschiedene „Interpretationen“
  $\rightsquigarrow$ dargestellt durch Wertzuweisungen
  (Funktionen von **P** nach $\{1, 0\}$; 1=„wahr“ und 0=„falsch“)
- Die Wahrheit (oder Falschheit) einer Formel ergibt sich aus dem Wahrheitswert der in ihr vorkommenden Atome
  $\rightsquigarrow$ Wertzuweisungen machen Formeln wahr oder falsch

Die Bedeutung einer Formel besteht darin, dass sie uns Informationen darüber liefert, welche Wertzuweisungen möglich sind, falls die Formel wahr sein soll.

Wertzuweisungen können Formeln erfüllen

Eine **Wertzuweisung** ist eine Funktion $w : \mathbf{P} \to \{1, 0\}$

Eine Wertzuweisung w **erfüllt** eine Formel F, in Symbolen $w \models F$, wenn eine der folgenden rekursiven Bedingungen gilt:

Form von F	$w \models F$ wenn:	$w \not\models F$ wenn:
$F \in \mathbf{P}$:	$w(F) = 1$	$w(F) = 0$
$F = \neg G$	$w \not\models G$	$w \models G$
$F = (G_1 \wedge G_2)$	$w \models G_1$ und $w \models G_2$	$w \not\models G_1$ oder $w \not\models G_2$
$F = (G_1 \vee G_2)$	$w \models G_1$ oder $w \models G_2$	$w \not\models G_1$ und $w \not\models G_2$
$F = (G_1 \to G_2)$	$w \not\models G_1$ oder $w \models G_2$	$w \models G_1$ und $w \not\models G_2$
$F = (G_1 \leftrightarrow G_2)$	$w \models G_1$ und $w \models G_2$ oder $w \not\models G_1$ und $w \not\models G_2$	$w \models G_1$ und $w \not\models G_2$ oder $w \not\models G_1$ und $w \models G_2$

Dabei bedeutet „A oder B“ immer „A oder B oder beides“.

Formeln Wahrheitswerte zuweisen

Wir können Wertzuweisungen von Atomen auf Formeln erweitern:

$$w(F) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \models F \\ 0 & \text{falls } w \not\models F \end{cases}$$

Formeln Wahrheitswerte zuweisen

Wir können Wertzuweisungen von Atomen auf Formeln erweitern:

$$w(F) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \models F \\ 0 & \text{falls } w \not\models F \end{cases}$$

Wahrheitswertetabellen illustrieren die Semantik der Junktoren:

$w(F)$	$w(\neg F)$
0	1
1	0

$w(F)$	$w(G)$	$w(F \wedge G)$	$w(F \vee G)$	$w(F \to G)$	$w(F \leftrightarrow G)$
0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1

Wahrheitswerte von Formeln bestimmen

- Der Wahrheitswert einer Formel hängt nur vom Wahrheitswert der (endlich vielen) Atome ab, die in ihr vorkommen.
  $\leadsto$ Wir geben oft nur diese an.
- Der Wahrheitswert einer Formel ergibt sich rekursiv aus dem Wahrheitswert ihrer Teilformeln.
  $\leadsto$ Darstellung in Wahrheitswertetabelle

Beispiel: Für die Formel $F = ((p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p))$ und Wertzuweisung w mit $w(p) = 0$ und $w(q) = 1$ ergibt sich die folgende Tabelle:

$w(p)$	$w(q)$	$w(p \to q)$	$w(\neg p)$	$w(\neg q)$	$w(\neg q \to \neg p)$	$w(F)$
0	1	1	1	0	1	1

Beispiel: Logelei

Anna behauptet: „Barbara lügt!“

Barbara behauptet: „Chris lügt!“

Chris behauptet: „Anna und Barbara lügen!“

Wer lügt?

(Und wie kann man das beweisen?)

Beispiel: Logelei

Anna behauptet: „Barbara lügt!“ $A \leftrightarrow \neg B$

Barbara behauptet: „Chris lügt!“

Chris behauptet: „Anna und Barbara lügen!“

Wer lügt?

(Und wie kann man das beweisen?)

Beispiel: Logelei

Anna behauptet: „Barbara lügt!“ $A \leftrightarrow \neg B$

Barbara behauptet: „Chris lügt!“ $B \leftrightarrow \neg C$

Chris behauptet: „Anna und Barbara lügen!“

Wer lügt?

(Und wie kann man das beweisen?)

Beispiel: Logelei

Anna behauptet: „Barbara lügt!“ $A \leftrightarrow \neg B$

Barbara behauptet: „Chris lügt!“ $B \leftrightarrow \neg C$

Chris behauptet: „Anna und Barbara lügen!“ $C \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

Wer lügt?

(Und wie kann man das beweisen?)

Logische Konsequenzen

Eine Wertzuweisung w ist Modell einer Formel F wenn $w \models F$ (also wenn $w(F) = 1$). Ist $\mathcal{F}$ eine (möglicherweise unendliche) Menge von Formeln, dann ist w ein Modell der Menge $\mathcal{F}$ wenn $w \models F$ für alle $F \in \mathcal{F}$ gilt. In diesem Fall schreiben wir $w \models \mathcal{F}$.

Logische Konsequenzen

Eine Wertzuweisung w ist Modell einer Formel F wenn $w \models F$ (also wenn $w(F) = 1$).
Ist $\mathcal{F}$ eine (möglicherweise unendliche) Menge von Formeln, dann ist w ein Modell der Menge $\mathcal{F}$ wenn $w \models F$ für alle $F \in \mathcal{F}$ gilt. In diesem Fall schreiben wir $w \models \mathcal{F}$.

Die logischen Schlussfolgerungen aus einer Formel(menge) ergeben sich aus ihren Modellen:

Sei $\mathcal{F}$ eine Menge von Formeln. Eine Formel G ist eine logische Konsequenz aus $\mathcal{F}$ wenn jedes Modell von $\mathcal{F}$ auch ein Modell von G ist.
In diesem Fall schreiben wir $\mathcal{F} \models G$.

- $\leadsto$ Die Formeln in $\mathcal{F}$ schränken die möglichen Interpretationen ein:
  Je mehr Formeln wahr sein sollen,
  desto weniger Freiheiten gibt es bei der Wahl der Modelle
- $\leadsto$ G ist eine logische Konsequenz wenn gilt:
  Falls $\mathcal{F}$ wahr ist, dann ist auch G garantiert wahr

Beispiel: Logelei

Anna behauptet: „Barbara lügt!“ $A \leftrightarrow \neg B$

Barbara behauptet: „Chris lügt!“ $B \leftrightarrow \neg C$

Chris behauptet: „Anna und Barbara lügen!“ $C \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

$w(A)$	$w(B)$	$w(C)$	$w(A \leftrightarrow \neg B)$	$w(B \leftrightarrow \neg C)$	$w(C \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B))$
0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	0
1	1	1	0	0	0

Beispiel: Logelei (2)

Anna behauptet: „Barbara lügt!“ $A \leftrightarrow \neg B$

Barbara behauptet: „Chris lügt!“ $B \leftrightarrow \neg C$

Chris behauptet: „Anna und Barbara lügen!“ $C \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

$w(A)$	$w(B)$	$w(C)$	$w(A \leftrightarrow \neg B)$	$w(B \leftrightarrow \neg C)$	$w(C \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B))$
0	1	0	1	1	1

$\rightsquigarrow$ Genau ein Modell (bezüglich der relevanten Atome)

Beispiel: Logelei (2)

Anna behauptet: „Barbara lügt!“ $A \leftrightarrow \neg B$

Barbara behauptet: „Chris lügt!“ $B \leftrightarrow \neg C$

Chris behauptet: „Anna und Barbara lügen!“ $C \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

$w(A)$	$w(B)$	$w(C)$	$w(A \leftrightarrow \neg B)$	$w(B \leftrightarrow \neg C)$	$w(C \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B))$
0	1	0	1	1	1

$\rightsquigarrow$ Genau ein Modell (bezüglich der relevanten Atome)

Logische Konsequenzen: Alle Formeln, die unter einer Wertzuweisung mit $w(A) = 0$, $w(B) = 1$ und $w(C) = 0$ wahr sind, z.B.:

- $\neg A$ („Anna lügt“)
- $\neg C$ („Chris lügt“)
- $\neg A \wedge \neg C$ („Anna und Chris lügen“)
- B („Barbara sagt die Wahrheit“)
- Aber auch: $D \vee \neg D$

Allgemeingültigkeit und Co.

Eine Formel F ist:

- unerfüllbar (oder inkonsistent), wenn sie keine Modelle hat
- erfüllbar (oder konsistent), wenn sie Modelle hat
- allgemeingültig (oder eine Tautologie), wenn alle Wertzuweisungen Modelle für die Formel sind
- widerlegbar, wenn sie nicht allgemeingültig ist

Diese Begriffe kann man für Mengen von Formeln genauso definieren.

Beispiel:

- $p \wedge \neg p$ ist unerfüllbar (und widerlegbar)
- $p \vee \neg p$ ist allgemeingültig (und erfüllbar)
- $p \wedge q$ ist erfüllbar und widerlegbar

Allgemeingültigkeit und Unerfüllbarkeit

Satz:

(1) Eine allgemeingültige Formel ist logische Konsequenz jeder anderen Formel(menge).

(2) Eine unerfüllbare Formel(menge) hat jede andere Formel als logische Konsequenz.

Beweis: Folgt direkt aus Definition von logischer Konsequenz. Für (2) ist es wichtig, dass eine Eigenschaft „für alle Modelle“ gilt, wenn es keine Modelle gibt (sie gilt dann für „alle null Modelle“). □

Allgemeingültigkeit und Unerfüllbarkeit

Satz:

(1) Eine allgemeingültige Formel ist logische Konsequenz jeder anderen Formel(menge).

(2) Eine unerfüllbare Formel(menge) hat jede andere Formel als logische Konsequenz.

Beweis: Folgt direkt aus Definition von logischer Konsequenz. Für (2) ist es wichtig, dass eine Eigenschaft „für alle Modelle“ gilt, wenn es keine Modelle gibt (sie gilt dann für „alle null Modelle“). □

Der unerwartete(?) Effekt (2) ist im Deutschen sprichwörtlich:

„Wenn das stimmt, dann bin ich der Kaiser von China!“

drückt aus, dass aus einer mutmaßlich falschen Annahme alles folgt, selbst wenn es offensichtlich unwahr ist.

Zusammenfassung und Ausblick

Mithilfe der Aussagenlogik kann man logische Beziehungen atomarer Aussagen spezifizieren

Wertzuweisungen können eine aussagenlogische Formel erfüllen – dann nennt man sie Modell – oder widerlegen

Die Modelle einer Formel(menge) definieren ihre logischen Konsequenzen (=„alles, was in diesen Fällen noch gilt“)

Offene Fragen:

- Geht logisches Schließen auch ohne Wahrheitswertetabellen?
- Wie (in)effizient ist logisches Schließen?
- Was hat das mit Sprachen, Berechnung und TMs zu tun?