



# THEORETISCHE INFORMATIK UND LOGIK

## 14. Vorlesung: Modelltheorie und logisches Schließen

Markus Krötzsch

Lehrstuhl Wissensbasierte Systeme

TU Dresden, 4. Juni 2018

# Ankündigung

Die Übungsgruppen am 6. Juni (Dies Academicus) werden verschoben:

- Dienstag 05.06.2018, 6.DS, APB/3027
- Donnerstag 07.06.2018, 6.DS, APB/3027

Studierende aus den den betroffenen Übungsgruppen sollten nach Möglichkeit die o.g. Ausweichtermine nutzen, können aber auch in eine der anderen Übungsgruppen die in der Woche stattfinden ausweichen.

# Rückblick: Logelei

Wir kehren zurück auf das Inselreich mit Menschen von Typ W (Wahrheitssager) und Typ L (Lügner).

Smullyan<sup>1</sup> fragte die Bewohner nach ihren Rauchgewohnheiten.

- Auf **Insel A** antwortete jeder der Bewohner:  
„Jeder, der hier von Typ W ist, raucht.“
- Auf **Insel B** antwortete jeder der Bewohner:  
„Einige von uns hier sind von Typ L und rauchen.“
- Auf **Insel C** hatten alle den gleichen Typ und jeder sagte:  
„Falls ich rauche, dann raucht jeder hier.“
- Auf **Insel D** hatten alle den gleichen Typ und jeder sagte:  
„Einige hier rauchen, aber ich nicht.“

Was können wir jeweils über die Bewohner und ihre Gewohnheiten schließen?

---

<sup>1</sup>R. Smullyan: A Beginner's Guide to Mathematical Logic, Dover 2014

# Prädikatenlogik: Syntax

Wir betrachten unendliche, disjunkte Mengen von Variablen  $\mathbf{V}$ , Konstanten  $\mathbf{C}$  und Prädikatensymbolen  $\mathbf{P}$ .

Ein prädikatenlogisches **Atom** ist ein Ausdruck  $p(t_1, \dots, t_n)$  für ein  $n$ -stelliges Prädikatensymbol  $p \in \mathbf{P}$  und Terme  $t_1, \dots, t_n \in \mathbf{V} \cup \mathbf{C}$ .

Die Menge der **prädikatenlogische Formeln** ist induktiv definiert:

- Jedes Atom  $p(t_1, \dots, t_n)$  ist eine prädikatenlogische Formel
- Wenn  $x \in \mathbf{V}$  eine Variable und  $F$  und  $G$  prädikatenlogische Formeln sind, dann sind auch die folgenden prädikatenlogische Formeln:
  - $\neg F$ : **Negation**, „nicht  $F$ “
  - $(F \wedge G)$ : **Konjunktion**, „ $F$  und  $G$ “
  - $(F \vee G)$ : **Disjunktion**, „ $F$  oder  $G$ “
  - $(F \rightarrow G)$ : **Implikation**, „ $F$  impliziert  $G$ “
  - $(F \leftrightarrow G)$ : **Äquivalenz**, „ $F$  ist äquivalent zu  $G$ “
  - $\exists x.F$ : **Existenzquantor**, „für ein  $x$  gilt  $F$ “
  - $\forall x.F$ : **Allquantor**, „für alle  $x$  gilt  $F$ “

# Semantik der Prädikatenlogik

# Interpretationen und Zuweisungen

Die Wertzuweisung der Aussagenlogik wird also durch Interpretationen und Zuweisungen für Variablen ersetzt.

Eine Interpretation  $\mathcal{I}$  ist ein Paar  $\langle \Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$  bestehend aus einer nichtleeren Grundmenge von Elementen  $\Delta^{\mathcal{I}}$  (der Domäne) und einer Interpretationsfunktion  $\cdot^{\mathcal{I}}$ , welche:

- jede Konstante  $a \in \mathbf{C}$  auf ein Element  $a^{\mathcal{I}} \in \Delta^{\mathcal{I}}$  und
- jedes  $n$ -stellige Prädikatensymbol  $p \in \mathbf{P}$  auf eine Relation  $p^{\mathcal{I}} \subseteq (\Delta^{\mathcal{I}})^n$

abbildet.

Eine Zuweisung  $\mathcal{Z}$  für eine Interpretation  $\mathcal{I}$  ist eine Funktion  $\mathcal{Z} : \mathbf{V} \rightarrow \Delta^{\mathcal{I}}$ , die Variablen auf Elemente der Domäne abbildet. Für  $x \in \mathbf{V}$  und  $\delta \in \Delta^{\mathcal{I}}$  schreiben wir  $\mathcal{Z}[x \mapsto \delta]$  für die Zuweisung, die  $x$  auf  $\delta$  und alle anderen Variablen  $y \neq x$  auf  $\mathcal{Z}(y)$  abbildet.

# Atome interpretieren

Wir bestimmen dementsprechend die Wahrheit von Atomen unter einer Interpretation und Zuweisung:

Sei  $\mathcal{I}$  eine Interpretation und  $\mathcal{Z}$  eine Zuweisung für  $\mathcal{I}$ .

- Für eine Konstante  $c$  definieren wir  $c^{\mathcal{I}, \mathcal{Z}} = c^{\mathcal{I}}$
- Für eine Variable  $x$  definieren wir  $x^{\mathcal{I}, \mathcal{Z}} = \mathcal{Z}(x)$

Für ein Atom  $p(t_1, \dots, t_n)$  setzen wir sodann:

- $p(t_1, \dots, t_n)^{\mathcal{I}, \mathcal{Z}} = \mathbf{1}$  wenn  $\langle t_1^{\mathcal{I}, \mathcal{Z}}, \dots, t_n^{\mathcal{I}, \mathcal{Z}} \rangle \in p^{\mathcal{I}}$  und
- $p(t_1, \dots, t_n)^{\mathcal{I}, \mathcal{Z}} = \mathbf{0}$  wenn  $\langle t_1^{\mathcal{I}, \mathcal{Z}}, \dots, t_n^{\mathcal{I}, \mathcal{Z}} \rangle \notin p^{\mathcal{I}}$ .

# Atome interpretieren

Wir bestimmen dementsprechend die Wahrheit von Atomen unter einer Interpretation und Zuweisung:

Sei  $\mathcal{I}$  eine Interpretation und  $\mathcal{Z}$  eine Zuweisung für  $\mathcal{I}$ .

- Für eine Konstante  $c$  definieren wir  $c^{\mathcal{I}, \mathcal{Z}} = c^{\mathcal{I}}$
- Für eine Variable  $x$  definieren wir  $x^{\mathcal{I}, \mathcal{Z}} = \mathcal{Z}(x)$

Für ein Atom  $p(t_1, \dots, t_n)$  setzen wir sodann:

- $p(t_1, \dots, t_n)^{\mathcal{I}, \mathcal{Z}} = 1$  wenn  $\langle t_1^{\mathcal{I}, \mathcal{Z}}, \dots, t_n^{\mathcal{I}, \mathcal{Z}} \rangle \in p^{\mathcal{I}}$  und
- $p(t_1, \dots, t_n)^{\mathcal{I}, \mathcal{Z}} = 0$  wenn  $\langle t_1^{\mathcal{I}, \mathcal{Z}}, \dots, t_n^{\mathcal{I}, \mathcal{Z}} \rangle \notin p^{\mathcal{I}}$ .

**Achtung!** Wir verwenden Interpretationen und Zuweisungen auf zwei Ebenen, die man nicht verwechseln sollte:

- (1) um Terme  $t$  auf Elemente  $t^{\mathcal{I}, \mathcal{Z}} \in \Delta^{\mathcal{I}}$  abzubilden
- (2) um Atome  $A$  auf Wahrheitswerte  $A^{\mathcal{I}, \mathcal{Z}} \in \{0, 1\}$  abzubilden

# Formeln interpretieren

Eine Interpretation  $I$  und eine Zuweisung  $Z$  für  $I$  erfüllen eine Formel  $F$ , in Symbolen  $I, Z \models F$ , wenn eine der folgenden rekursiven Bedingungen gilt:

Formel $F$	$I, Z \models F$ wenn:	$I, Z \not\models F$ wenn:
$F$ Atom	$F^{I,Z} = 1$	$F^{I,Z} = 0$
$\neg G$	$I, Z \not\models G$	$I, Z \models G$
$(G_1 \wedge G_2)$	$I, Z \models G_1$ und $I, Z \models G_2$	$I, Z \not\models G_1$ oder $I, Z \not\models G_2$
$(G_1 \vee G_2)$	$I, Z \models G_1$ oder $I, Z \models G_2$	$I, Z \not\models G_1$ und $I, Z \not\models G_2$
$(G_1 \rightarrow G_2)$	$I, Z \not\models G_1$ oder $I, Z \models G_2$	$I, Z \models G_1$ und $I, Z \not\models G_2$
$(G_1 \leftrightarrow G_2)$	$I, Z \models G_1$ und $I, Z \models G_2$ oder $I, Z \not\models G_1$ und $I, Z \not\models G_2$	$I, Z \models G_1$ und $I, Z \not\models G_2$ oder $I, Z \not\models G_1$ und $I, Z \models G_2$
$\forall x.G$	$I, Z[x \mapsto \delta] \models G$ für alle $\delta \in \Delta^I$	$I, Z[x \mapsto \delta] \not\models G$ für mindestens ein $\delta \in \Delta^I$
$\exists x.G$	$I, Z[x \mapsto \delta] \models G$ für mindestens ein $\delta \in \Delta^I$	$I, Z[x \mapsto \delta] \not\models G$ für alle $\delta \in \Delta^I$

# Beispiel

„Null ist eine natürliche Zahl und jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger, der ebenfalls eine natürliche Zahl ist.“

$$F = \text{NatNum}(\text{null}) \wedge \forall x. (\text{NatNum}(x) \rightarrow \exists y. (\text{succ}(x, y) \wedge \text{NatNum}(y)))$$

Wir betrachten eine Interpretation  $\mathcal{I}$  mit

- $\Delta^{\mathcal{I}} = \mathbb{R}$  die Menge der reellen Zahlen
- $\text{null}^{\mathcal{I}} = 0$
- $\text{NatNum}^{\mathcal{I}} = \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$  die Menge der natürlichen Zahlen
- $\text{succ}^{\mathcal{I}} = \{\langle d, e \rangle \mid d, e \in \mathbb{R}, d < e\}$

Dann gilt  $\mathcal{I} \models F$  (unter jeder beliebigen Zuweisung).

Notation: Bei der Interpretation von Sätzen (Formeln ohne freie Variablen) spielen Zuweisungen keine Rolle. Wir schreiben sie in diesem Fall nicht.

# Logik auf Sätzen

Wie im vorigen Beispiel interessieren uns oft nur Sätze:

- In den meisten Anwendungen arbeitet man nur mit Sätzen
- Dann genügt es, Interpretationen zu betrachten
- Zuweisungen sind in diesem Fall ein technisches Hilfsmittel zur Definition der Bedeutung von Sätzen

Eine Menge von Sätzen wird oft **Theorie** genannt.

# Logik auf Sätzen

Wie im vorigen Beispiel interessieren uns oft nur Sätze:

- In den meisten Anwendungen arbeitet man nur mit Sätzen
- Dann genügt es, Interpretationen zu betrachten
- Zuweisungen sind in diesem Fall ein technisches Hilfsmittel zur Definition der Bedeutung von Sätzen

Eine Menge von Sätzen wird oft **Theorie** genannt.

Beispiel: Der Begriff stammt aus der Mathematik. Die Theorie der partiellen Ordnungen kann man z.B. wie folgt definieren:

$$\forall x. (x \leq x)$$

Reflexivität

$$\forall x, y, z. ((x \leq y \wedge y \leq z) \rightarrow x \leq z)$$

Transitivität

$$\forall x, y. ((x \leq y \wedge y \leq x) \rightarrow x \approx y)$$

Antisymmetrie

Dies definiert die Eigenschaften eines binären Prädikates  $\leq$  (hier infix geschrieben). Dabei verwenden wir zudem ein Gleichheitsprädikat  $\approx$  (dazu später mehr).

# Semantische Grundbegriffe

## Wie definiert man logische Semantik „modelltheoretisch“?

Formeln	abzählbare Menge syntaktischer Ausdrücke
Modelle	Menge semantischer Interpretationen
Erfüllungsrelation $\models$	Beziehung zwischen Modellen & Formeln: In welchen Modellen sind welche Formeln wahr?

## Wie definiert man logische Semantik „modelltheoretisch“?

		<b>Aussagenl.</b>
Formeln	abzählbare Menge syntaktischer Ausdrücke	Aussagenlogische Formeln
Modelle	Menge semantischer Interpretationen	Wertzuweisungen
Erfüllungsrelation $\models$	Beziehung zwischen Modellen & Formeln: In welchen Modellen sind welche Formeln wahr?	Aussagenlogische Erfüllungsrelation

## Wie definiert man logische Semantik „modelltheoretisch“?

		<b>Aussagenl.</b>	<b>Prädikatenl.</b>
Formeln	abzählbare Menge syntaktischer Ausdrücke	Aussagenlogische Formeln	Prädikatenlogische Sätze
Modelle	Menge semantischer Interpretationen	Wertzuweisungen	Prädikatenlogische Interpretationen
Erfüllungsrelation $\models$	Beziehung zwischen Modellen & Formeln: In welchen Modellen sind welche Formeln wahr?	Aussagenlogische Erfüllungsrelation	Prädikatenlogische Erfüllungsrelation

## Wie definiert man logische Semantik „modelltheoretisch“?

		<b>Aussagenl.</b>	<b>Prädikatenl.</b>	<b>Prädikatenl. (offen)</b>
<b>Formeln</b>	abzählbare Menge syntaktischer Ausdrücke	Aussagenlogische Formeln	Prädikatenlogische Sätze	Prädikatenlogische Formeln (offen oder geschlossen)
<b>Modelle</b>	Menge semantischer Interpretationen	Wertzuweisungen	Prädikatenlogische Interpretationen	Prädikatenlogische Interpretationen + Zuweisungen
<b>Erfüllungsrelation <math>\models</math></b>	Beziehung zwischen Modellen & Formeln: In welchen Modellen sind welche Formeln wahr?	Aussagenlogische Erfüllungsrelation	Prädikatenlogische Erfüllungsrelation	Prädikatenlogische Erfüllungsrelation

# Modelltheorie: Intuition

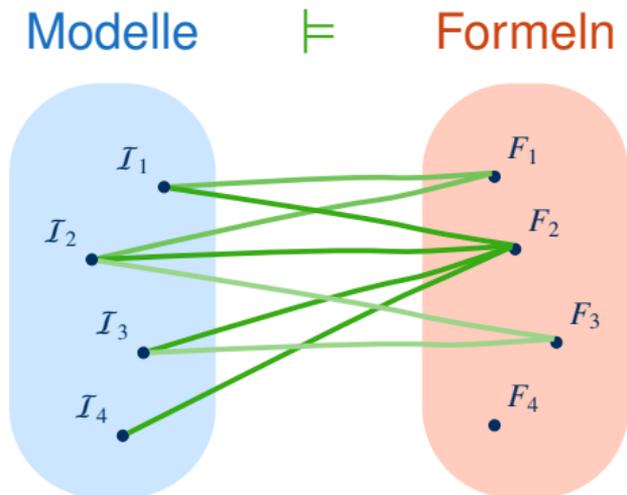
Die Modelltheorie einer Logik legt (ziemlich abstrakt) fest, worüber die Logik etwas aussagt:

- **Formeln:** Behauptungen, die wahr oder falsch sein können
- **Modelle:** Mögliche Welten, in denen manche Behauptungen gelten und andere nicht

# Modelltheorie: Intuition

Die Modelltheorie einer Logik legt (ziemlich abstrakt) fest, worüber die Logik etwas aussagt:

- **Formeln:** Behauptungen, die wahr oder falsch sein können
- **Modelle:** Mögliche Welten, in denen manche Behauptungen gelten und andere nicht



# Tautologien und Widersprüche

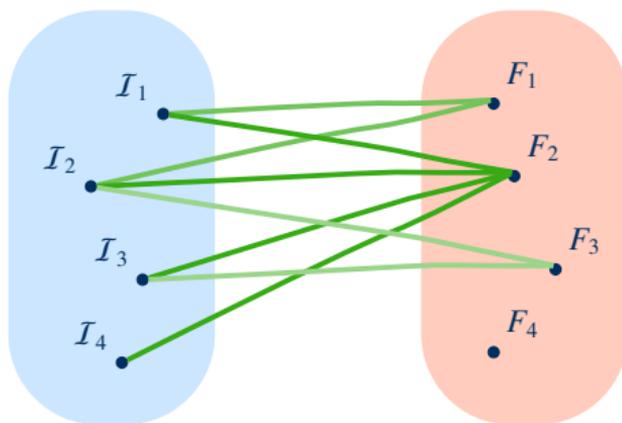
Man unterscheidet Typen von Formeln nach ihren Modellen:

- **allgemeingültig (tautologisch)**: Eine Formel, die in allen Modellen wahr ist
- **widersprüchlich (inkonsistent)**: Eine Formel, die in keinem Modell wahr ist
- **erfüllbar**: Eine Formel, die in einem Modell wahr ist
- **widerlegbar**: Eine Formel, die in einem Modell falsch ist

# Tautologien und Widersprüche

Man unterscheidet Typen von Formeln nach ihren Modellen:

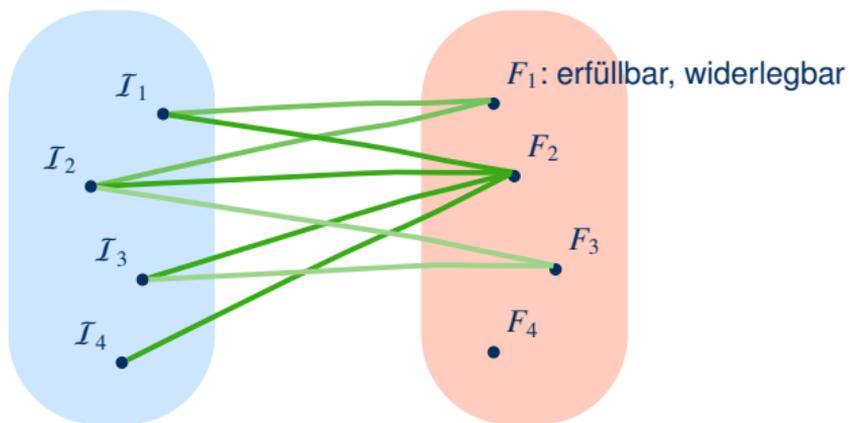
- **allgemeingültig (tautologisch)**: Eine Formel, die in allen Modellen wahr ist
- **widersprüchlich (inkonsistent)**: Eine Formel, die in keinem Modell wahr ist
- **erfüllbar**: Eine Formel, die in einem Modell wahr ist
- **widerlegbar**: Eine Formel, die in einem Modell falsch ist



# Tautologien und Widersprüche

Man unterscheidet Typen von Formeln nach ihren Modellen:

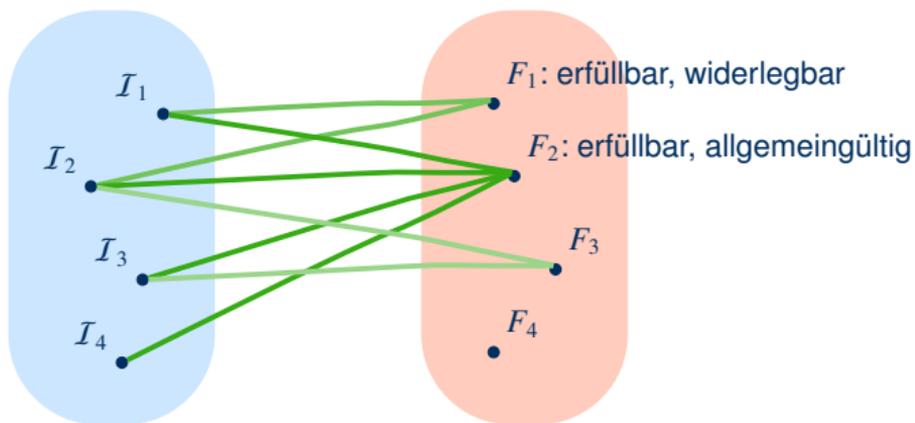
- **allgemeingültig (tautologisch)**: Eine Formel, die in allen Modellen wahr ist
- **widersprüchlich (inkonsistent)**: Eine Formel, die in keinem Modell wahr ist
- **erfüllbar**: Eine Formel, die in einem Modell wahr ist
- **widerlegbar**: Eine Formel, die in einem Modell falsch ist



# Tautologien und Widersprüche

Man unterscheidet Typen von Formeln nach ihren Modellen:

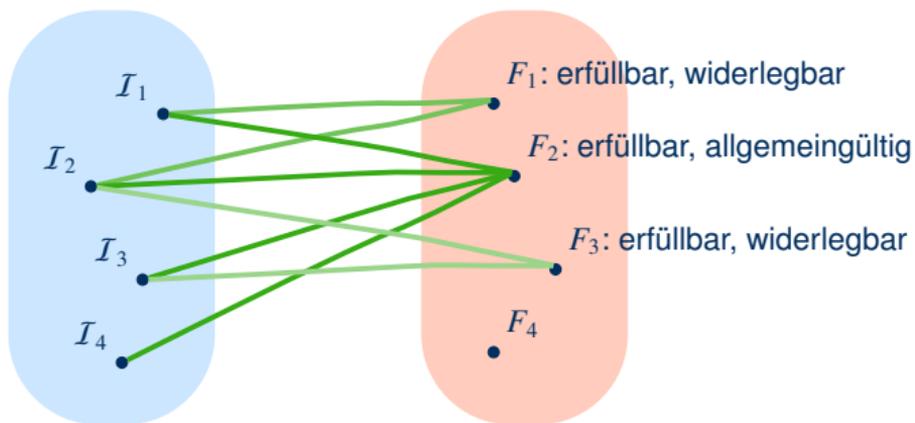
- **allgemeingültig (tautologisch)**: Eine Formel, die in allen Modellen wahr ist
- **widersprüchlich (inkonsistent)**: Eine Formel, die in keinem Modell wahr ist
- **erfüllbar**: Eine Formel, die in einem Modell wahr ist
- **widerlegbar**: Eine Formel, die in einem Modell falsch ist



# Tautologien und Widersprüche

Man unterscheidet Typen von Formeln nach ihren Modellen:

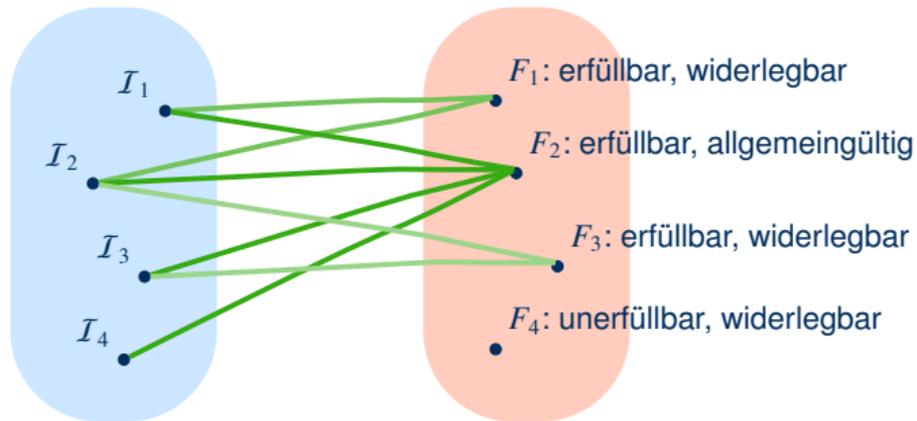
- **allgemeingültig (tautologisch)**: Eine Formel, die in allen Modellen wahr ist
- **widersprüchlich (inkonsistent)**: Eine Formel, die in keinem Modell wahr ist
- **erfüllbar**: Eine Formel, die in einem Modell wahr ist
- **widerlegbar**: Eine Formel, die in einem Modell falsch ist



# Tautologien und Widersprüche

Man unterscheidet Typen von Formeln nach ihren Modellen:

- **allgemeingültig (tautologisch)**: Eine Formel, die in allen Modellen wahr ist
- **widersprüchlich (inkonsistent)**: Eine Formel, die in keinem Modell wahr ist
- **erfüllbar**: Eine Formel, die in einem Modell wahr ist
- **widerlegbar**: Eine Formel, die in einem Modell falsch ist

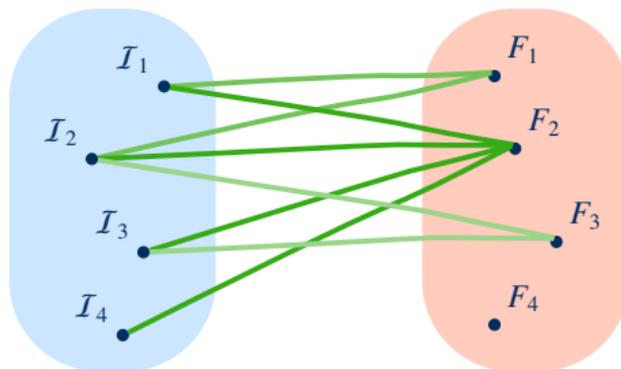


# Logisches Schließen

Aus der Modelltheorie ergibt sich, was **logisches Schließen** genau bedeutet und welche Schlüsse man ziehen darf:

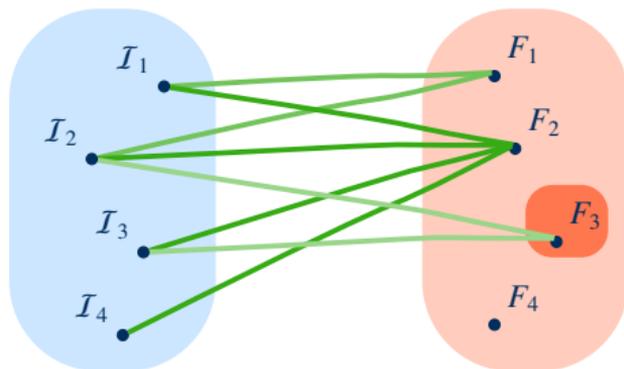
- Wenn  $\mathcal{I} \models F$ , dann nennt man  $\mathcal{I}$  ein **Modell für** die Formel  $F$  und man sagt  $\mathcal{I}$  **erfüllt**  $F$ .
- $\mathcal{I}$  ist ein **Modell für eine Formelmenge**  $\mathcal{T}$ , in Symbolen  $\mathcal{I} \models \mathcal{T}$ , wenn  $\mathcal{I} \models F$  für jede Formel  $F \in \mathcal{T}$ .
- Eine Formel  $F$  ist eine **logische Konsequenz** aus einer Formel(menge)  $G$ , in Symbolen  $G \models F$ , wenn jedes Modell von  $G$  auch ein Modell von  $F$  ist, d.h.  $\mathcal{I} \models G$  impliziert  $\mathcal{I} \models F$ .  
**Sonderfall:** Ist  $F$  Tautologie dann schreiben wir  $\models F$
- Zwei Formel(mengen)  $F$  und  $G$  sind **semantisch äquivalent**, in Symbolen  $F \equiv G$ , wenn sie die gleichen Modelle haben, d.h. wenn  $\mathcal{I} \models F$  gdw.  $\mathcal{I} \models G$  für alle Modelle  $\mathcal{I}$ .

# Beispiel: Logisches Schließen



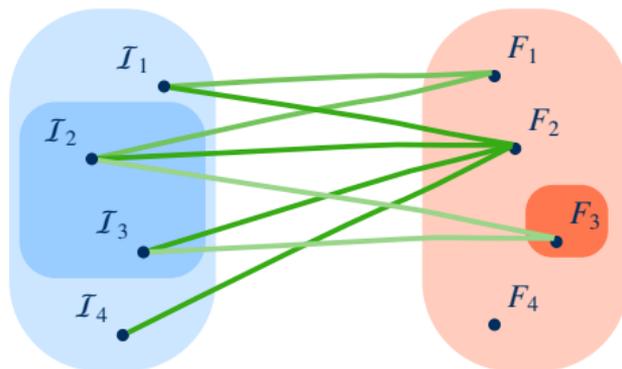
Was folgt aus  $F_3$ ?

# Beispiel: Logisches Schließen



Was folgt aus  $F_3$ ?

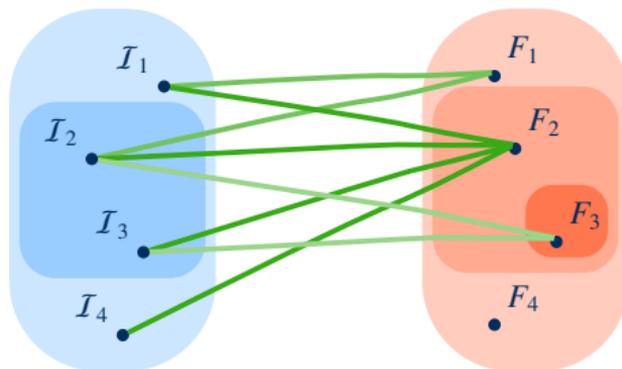
# Beispiel: Logisches Schließen



Was folgt aus  $F_3$ ?

- Modelle von  $F_3$  sind  $I_2$  und  $I_3$

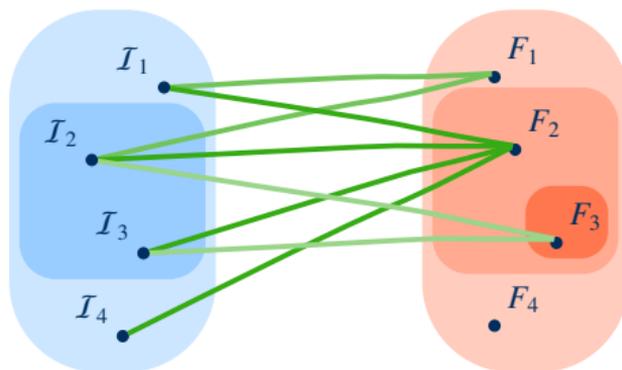
# Beispiel: Logisches Schließen



Was folgt aus  $F_3$ ?

- Modelle von  $F_3$  sind  $I_2$  und  $I_3$
- $I_2$  und  $I_3$  sind Modelle von zwei Formeln:  $F_3$  und  $F_2$

# Beispiel: Logisches Schließen

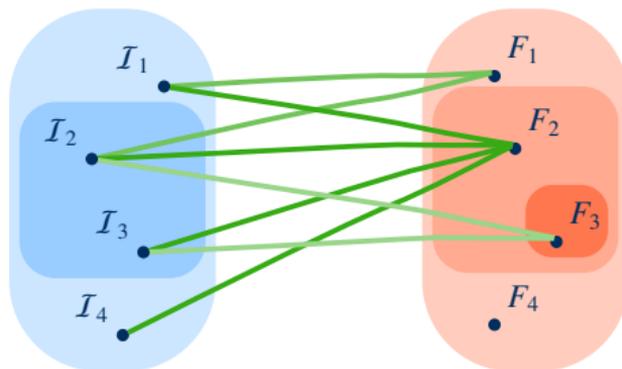


Was folgt aus  $F_3$ ?

- Modelle von  $F_3$  sind  $\mathcal{I}_2$  und  $\mathcal{I}_3$
- $\mathcal{I}_2$  und  $\mathcal{I}_3$  sind Modelle von zwei Formeln:  $F_3$  und  $F_2$

Anders gesagt: „Immer wenn  $F_3$  wahr ist, dann ist auch  $F_2$  wahr.“

# Beispiel: Logisches Schließen



Was folgt aus  $F_3$ ?

- Modelle von  $F_3$  sind  $I_2$  und  $I_3$
- $I_2$  und  $I_3$  sind Modelle von zwei Formeln:  $F_3$  und  $F_2$

Anders gesagt: „Immer wenn  $F_3$  wahr ist, dann ist auch  $F_2$  wahr.“

Es folgt also:  $F_3 \models F_2$

# Eigenschaften der semantischen Äquivalenz

Die aus der Aussagenlogik bekannten Eigenschaften von  $\equiv$  gelten auch allgemein:

Satz:  $\equiv$  ist eine Äquivalenzrelation, d.h. reflexiv, symmetrisch und transitiv.

Satz:

- Alle Tautologien sind semantisch äquivalent
- Alle unerfüllbaren Formeln sind semantisch äquivalent

Satz: Semantische Äquivalenz entspricht wechselseitiger logischer Konsequenz:

$$F \equiv G \quad \text{genau dann wenn} \quad F \models G \text{ und } G \models F$$

Die Behauptungen folgen jeweils direkt aus den Definitionen.

# Inseln mit Lügnern und Wahrheitssagern

Rückblick Logelei: „Wir sind hier alle vom gleichen Typ.“

- „Jeder Einwohner ist entweder Wahrheitssager oder Lügner.“

$$F_1 = \forall x. ((W(x) \wedge \neg L(x)) \vee (L(x) \wedge \neg W(x)))$$

- „Auf dieser Insel haben alle den gleichen Typ.“

$$F_2 = \forall x. W(x) \vee \forall x. L(x)$$

# Inseln mit Lügnern und Wahrheitssagern

Rückblick Logelei: „Wir sind hier alle vom gleichen Typ.“

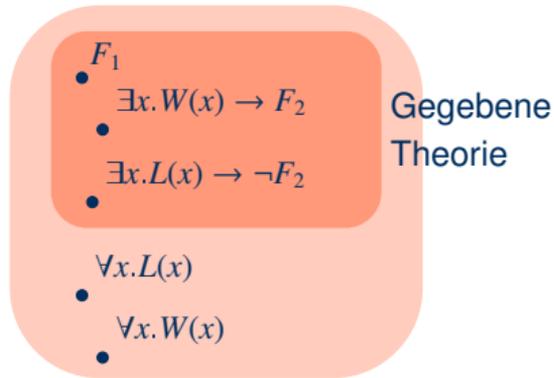
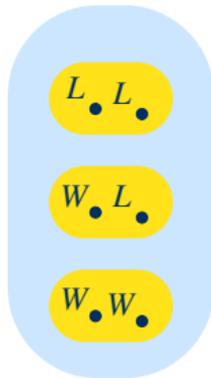
- „Jeder Einwohner ist entweder Wahrheitssager oder Lügner.“

$$F_1 = \forall x. ((W(x) \wedge \neg L(x)) \vee (L(x) \wedge \neg W(x)))$$

- „Auf dieser Insel haben alle den gleichen Typ.“

$$F_2 = \forall x. W(x) \vee \forall x. L(x)$$

Wir betrachten einige „repräsentative“ Modelle von  $F_1$ , eine Formalisierung der gegebenen Information und weitere Formeln:



# Inseln mit Lügnern und Wahrheitssagern

Rückblick Logelei: „Wir sind hier alle vom gleichen Typ.“

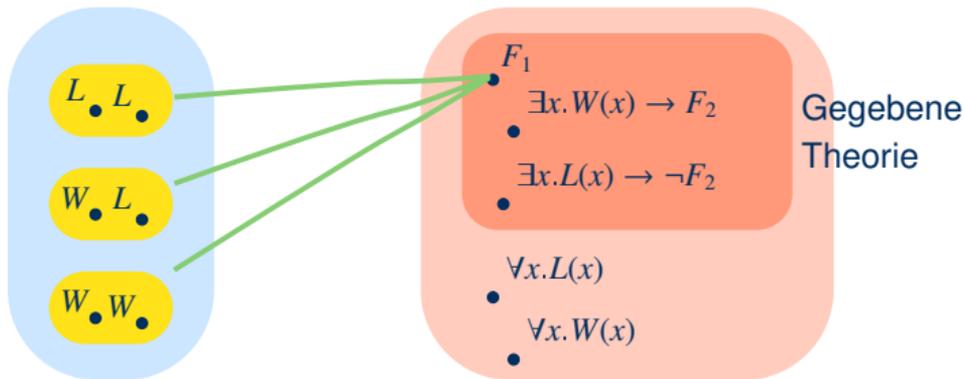
- „Jeder Einwohner ist entweder Wahrheitssager oder Lügner.“

$$F_1 = \forall x. ((W(x) \wedge \neg L(x)) \vee (L(x) \wedge \neg W(x)))$$

- „Auf dieser Insel haben alle den gleichen Typ.“

$$F_2 = \forall x. W(x) \vee \forall x. L(x)$$

Wir betrachten einige „repräsentative“ Modelle von  $F_1$ , eine Formalisierung der gegebenen Information und weitere Formeln:



# Inseln mit Lügnern und Wahrheitssagern

Rückblick Logelei: „Wir sind hier alle vom gleichen Typ.“

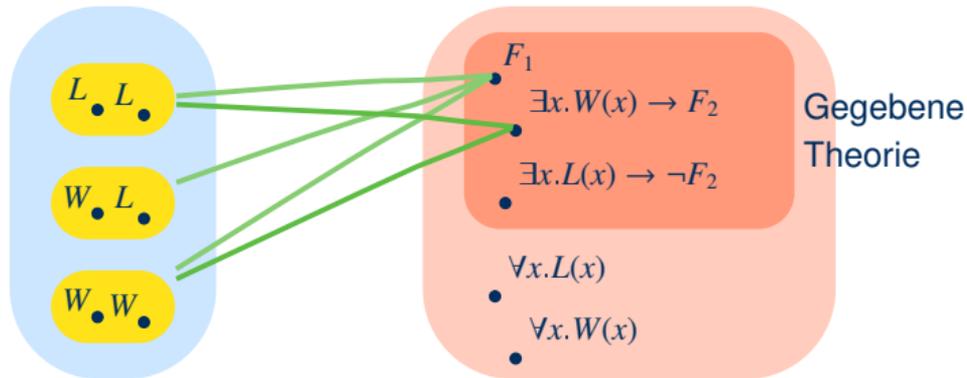
- „Jeder Einwohner ist entweder Wahrheitssager oder Lügner.“

$$F_1 = \forall x. ((W(x) \wedge \neg L(x)) \vee (L(x) \wedge \neg W(x)))$$

- „Auf dieser Insel haben alle den gleichen Typ.“

$$F_2 = \forall x. W(x) \vee \forall x. L(x)$$

Wir betrachten einige „repräsentative“ Modelle von  $F_1$ , eine Formalisierung der gegebenen Information und weitere Formeln:



# Inseln mit Lügnern und Wahrheitssagern

Rückblick Logelei: „Wir sind hier alle vom gleichen Typ.“

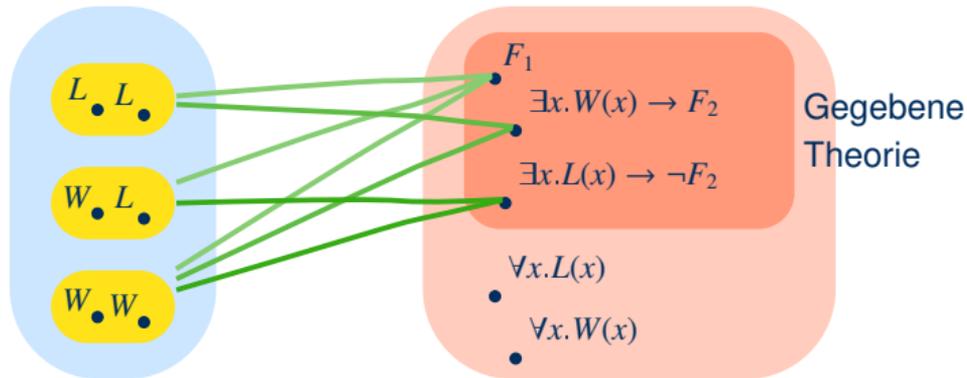
- „Jeder Einwohner ist entweder Wahrheitssager oder Lügner.“

$$F_1 = \forall x. ((W(x) \wedge \neg L(x)) \vee (L(x) \wedge \neg W(x)))$$

- „Auf dieser Insel haben alle den gleichen Typ.“

$$F_2 = \forall x. W(x) \vee \forall x. L(x)$$

Wir betrachten einige „repräsentative“ Modelle von  $F_1$ , eine Formalisierung der gegebenen Information und weitere Formeln:



# Inseln mit Lügnern und Wahrheitssagern

Rückblick Logelei: „Wir sind hier alle vom gleichen Typ.“

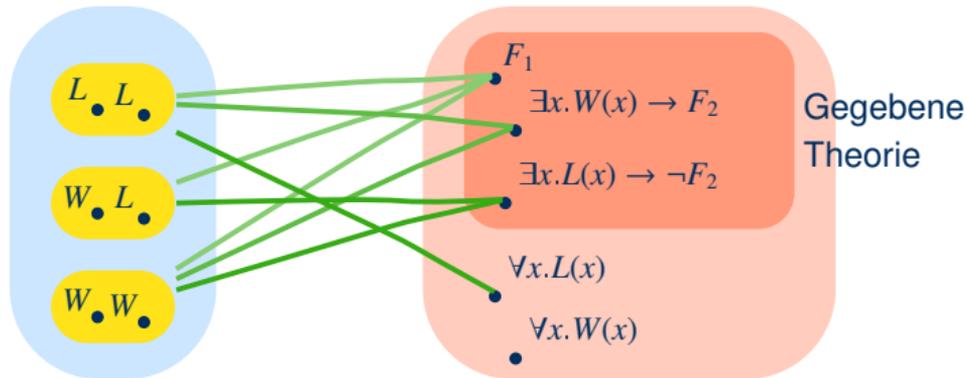
- „Jeder Einwohner ist entweder Wahrheitssager oder Lügner.“

$$F_1 = \forall x. ((W(x) \wedge \neg L(x)) \vee (L(x) \wedge \neg W(x)))$$

- „Auf dieser Insel haben alle den gleichen Typ.“

$$F_2 = \forall x. W(x) \vee \forall x. L(x)$$

Wir betrachten einige „repräsentative“ Modelle von  $F_1$ , eine Formalisierung der gegebenen Information und weitere Formeln:



# Inseln mit Lügnern und Wahrheitssagern

Rückblick Logelei: „Wir sind hier alle vom gleichen Typ.“

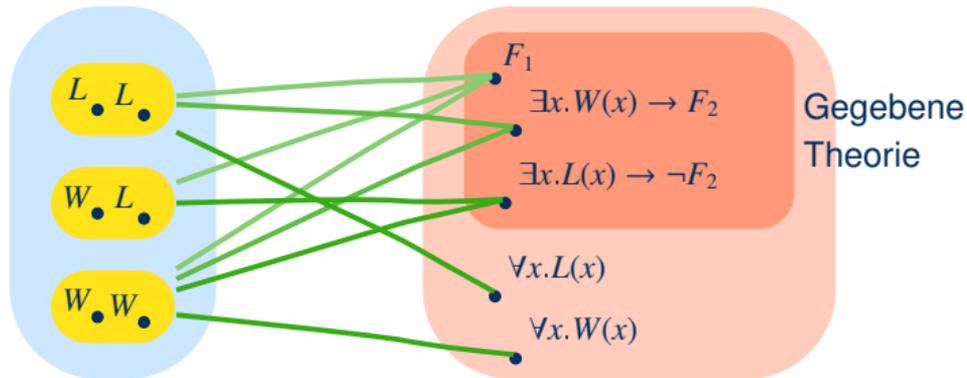
- „Jeder Einwohner ist entweder Wahrheitssager oder Lügner.“

$$F_1 = \forall x. ((W(x) \wedge \neg L(x)) \vee (L(x) \wedge \neg W(x)))$$

- „Auf dieser Insel haben alle den gleichen Typ.“

$$F_2 = \forall x. W(x) \vee \forall x. L(x)$$

Wir betrachten einige „repräsentative“ Modelle von  $F_1$ , eine Formalisierung der gegebenen Information und weitere Formeln:



# Inseln mit Lügnern und Wahrheitssagern

Rückblick Logelei: „Wir sind hier alle vom gleichen Typ.“

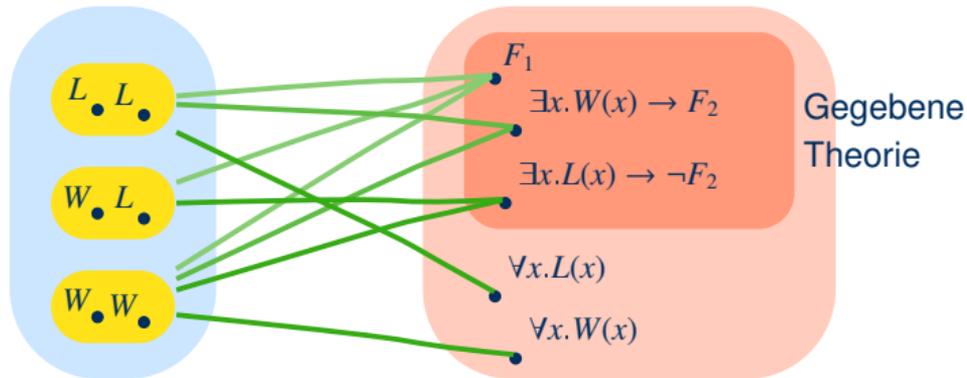
- „Jeder Einwohner ist entweder Wahrheitssager oder Lügner.“

$$F_1 = \forall x. ((W(x) \wedge \neg L(x)) \vee (L(x) \wedge \neg W(x)))$$

- „Auf dieser Insel haben alle den gleichen Typ.“

$$F_2 = \forall x. W(x) \vee \forall x. L(x)$$

Wir betrachten einige „repräsentative“ Modelle von  $F_1$ , eine Formalisierung der gegebenen Information und weitere Formeln:



Aus der Theorie folgt  $\forall x. W(x)$ : „Alle Inselbewohner sind von Typ W.“

# Das Problem des logischen Schließens

Zwei praktisch wichtige Fragen:

(1) **Model Checking:**

Für ein gegebenes Modell  $\mathcal{I}$  und eine Formel  $F$ , gilt  $\mathcal{I} \models F$ ?

(2) **Logische Folgerung (Entailment):**

Für gegebene Formel(menge)n  $F$  und  $G$ , gilt  $F \models G$ ?

# Das Problem des logischen Schließens

Zwei praktisch wichtige Fragen:

(1) **Model Checking:**

Für ein gegebenes Modell  $\mathcal{I}$  und eine Formel  $F$ , gilt  $\mathcal{I} \models F$ ?

(2) **Logische Folgerung (Entailment):**

Für gegebene Formel(menge)n  $F$  und  $G$ , gilt  $F \models G$ ?

In der Aussagenlogik ist beides relativ einfach lösbar:

(1) Berechne den Wahrheitswert unter einer Belegung (zeitlinear)

(2) Betrachte alle möglichen Belegungen (exponentiell; NP-vollständig)

# Das Problem des logischen Schließens

Zwei praktisch wichtige Fragen:

(1) **Model Checking:**

Für ein gegebenes Modell  $\mathcal{I}$  und eine Formel  $F$ , gilt  $\mathcal{I} \models F$ ?

(2) **Logische Folgerung (Entailment):**

Für gegebene Formel(menge)n  $F$  und  $G$ , gilt  $F \models G$ ?

In der **Aussagenlogik** ist beides relativ einfach lösbar:

(1) Berechne den Wahrheitswert unter einer Belegung (zeitlinear)

(2) Betrachte alle möglichen Belegungen (exponentiell; NP-vollständig)

In der **Prädikatenlogik** ist das nicht so einfach:

siehe kommende Vorlesungen

# Monotonie und Tautologie

Aus der Definition von  $\models$  folgt **Monotonie**:

- Mehr Sätze  $\Leftrightarrow$  weniger Modelle
- Je **mehr Sätze** in einer logischen Theorie gegeben sind, desto **weniger Modelle** erfüllen die gesamte Theorie, desto **mehr Schlussfolgerungen** kann man aus ihr ziehen

Das heißt: „**Mehr Annahmen führen zu mehr Schlussfolgerungen**“

# Monotonie und Tautologie

Aus der Definition von  $\models$  folgt **Monotonie**:

- Mehr Sätze  $\Leftrightarrow$  weniger Modelle
- Je **mehr Sätze** in einer logischen Theorie gegeben sind, desto **weniger Modelle** erfüllen die gesamte Theorie, desto **mehr Schlussfolgerungen** kann man aus ihr ziehen

Das heißt: „**Mehr Annahmen führen zu mehr Schlussfolgerungen**“

Die Extremfälle dieses Prinzips sind:

- **Tautologien**: sind in jedem Modell wahr und daher logische Konsequenz jeder Theorie
- **Unerfüllbare Formeln**: sind in keinem Modell wahr und haben daher alle anderen Sätze als Konsequenz

# Modelltheorie ist allgemein gültig

Was wir bisher über Modelltheorie gesagt haben, gilt für jede Logik, deren Semantik auf einer Beziehung  $\models$  von Modellen zu einzelnen Formeln basiert:

- Aussagenlogik
- Prädikatenlogik (nur Sätze und Interpretationen)
- Prädikatenlogik (beliebige Formeln und Interpretationen+Zuweisungen)
- Logik zweiter Stufe
- Modal-, Temporal- und Beschreibungslogiken
- Mehrwertige Logiken
- Nichtklassische Logiken
- ...

Andere Eigenschaften der Prädikatenlogik sind nicht ganz so allgemein.

# Prädikatenlogik und Aussagenlogik

# Verhältnis zur Aussagenlogik

Die Semantik der Operatoren  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$  und  $\leftrightarrow$  ist in Prädikatenlogik und Aussagenlogik gleich definiert:

- Wir ersetzen Wertzuweisungen  $w$  durch Interpretationen  $\mathcal{I}$  mit Zuweisungen  $\mathcal{Z}$
- Ansonsten ist die Definition der Semantik genau gleich

$\leadsto$  alle aussagenlogischen Gesetze gelten analog

# Verhältnis zur Aussagenlogik

Die Semantik der Operatoren  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$  und  $\leftrightarrow$  ist in Prädikatenlogik und Aussagenlogik gleich definiert:

- Wir ersetzen Wertzuweisungen  $w$  durch Interpretationen  $\mathcal{I}$  mit Zuweisungen  $\mathcal{Z}$
- Ansonsten ist die Definition der Semantik genau gleich

$\leadsto$  alle aussagenlogischen Gesetze gelten analog

Beispiel: Die De Morganschen Regeln gelten auch in der Prädikatenlogik, z.B.  $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models \neg(F \wedge G)$  genau dann wenn  $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models (\neg F \vee \neg G)$ , das heißt  $\neg(F \wedge G) \equiv (\neg F \vee \neg G)$ .

Allgemein gelten alle bekannten aussagenlogischen Äquivalenzen

„ $\models = \rightarrow$ “ und „ $\equiv = \leftrightarrow$ “

Auch die folgenden Sätze gelten analog zur Aussagenlogik (siehe Formale Systeme, Vorlesung 22):

Satz (Deduktionstheorem): Für jede Formelmeng  $\mathcal{F}$  und Formeln  $G$  und  $H$  gilt  $\mathcal{F} \models G \rightarrow H$  genau dann wenn  $\mathcal{F} \cup \{G\} \models H$ .

Korollar:  $F \wedge G \models H$  genau dann wenn  $F \models G \rightarrow H$ .

Korollar:  $F \equiv G$  genau dann wenn  $\models F \leftrightarrow G$ .

Dennoch sind  $\models$  und  $\equiv$  nicht das selbe wie  $\rightarrow$  und  $\leftrightarrow$ :

- $\models$  und  $\equiv$  können sich auch auf (möglicherweise unendliche) Mengen von Formeln beziehen
- $\rightarrow$  und  $\leftrightarrow$  sind syntaktische Operatoren und können (eventuell geschachtelt) in Formeln auftreten

# Das Ersetzungstheorem

Auch das folgende intuitiv einleuchtende Ergebnis kann von der Aussagenlogik auf die Prädikatenlogik übertragen werden:

Satz (Ersetzungstheorem): Sei  $F$  eine Formel mit einer Teilformel  $G$ . Wenn  $G \equiv G'$  und wenn  $F'$  aus  $F$  gebildet werden kann, indem man ein beliebiges Vorkommen von  $G$  in  $F$  durch  $G'$  ersetzt, dann gilt auch  $F \equiv F'$ .

Der detaillierte Beweis muss allerdings alle möglichen Formen von Formeln betrachten (Induktion über Formelstruktur). Im Vergleich zur Aussagenlogik müsste man also noch zeigen, dass die Ersetzung von äquivalenten Formeln in  $\exists x.G$  und  $\forall x.G$  zulässig ist.

# Rückblick: Aussagenlogische Äquivalenzen (1)

$$F \wedge G \equiv G \wedge F$$

$$F \vee G \equiv G \vee F$$

Kommutativität

$$(F \wedge G) \wedge H \equiv F \wedge (G \wedge H)$$

$$(F \vee G) \vee H \equiv F \vee (G \vee H)$$

Assoziativität

$$F \wedge (G \vee H) \equiv (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$$

$$F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$$

Distributivität

$$F \wedge F \equiv F$$

$$F \vee F \equiv F$$

Idempotenz

$$F \wedge (F \vee G) \equiv F$$

$$F \vee (F \wedge G) \equiv F$$

Absorbtion

## Rückblick: Aussagenlogische Äquivalenzen (2)

$$\neg\neg F \equiv F$$

doppelte Negation

$$\neg(F \wedge G) \equiv (\neg F \vee \neg G)$$

$$\neg(F \vee G) \equiv (\neg F \wedge \neg G)$$

De Morgansche Gesetze

$$F \wedge \top \equiv F$$

$$F \vee \top \equiv \top$$

Gesetze mit  $\top$

$$F \wedge \perp \equiv \perp$$

$$F \vee \perp \equiv F$$

Gesetze mit  $\perp$

$$\neg\top \equiv \perp$$

$$\neg\perp \equiv \top$$

Dabei stellen wir wie zuvor  $\top$  durch eine beliebige Tautologie (z.B.  $p \vee \neg p$ ) und  $\perp$  durch einen beliebigen Widerspruch (z.B.  $p \wedge \neg p$ ) dar.

# Aussagenlogik in Prädikatenlogik darstellen

Aussagenlogische Atome  $p$  kann man durch prädikatenlogische Atome  $p()$  auffassen, wobei  $p$  ein nullstelliges Prädikatensymbol ist.

Sei  $p \in \mathbf{P}$  ein nullstelliges Prädikat

Welche Interpretationen  $p^I$  sind möglich?

# Aussagenlogik in Prädikatenlogik darstellen

Aussagenlogische Atome  $p$  kann man durch prädikatenlogische Atome  $p()$  auffassen, wobei  $p$  ein nullstelliges Prädikatensymbol ist.

Sei  $p \in \mathbf{P}$  ein nullstelliges Prädikat

Welche Interpretationen  $p^I$  sind möglich?

- Laut Definition gilt  $p^I \subseteq (\Delta^I)^0$

# Aussagenlogik in Prädikatenlogik darstellen

Aussagenlogische Atome  $p$  kann man durch prädikatenlogische Atome  $p()$  auffassen, wobei  $p$  ein nullstelliges Prädikatensymbol ist.

Sei  $p \in \mathbf{P}$  ein nullstelliges Prädikat

Welche Interpretationen  $p^I$  sind möglich?

- Laut Definition gilt  $p^I \subseteq (\Delta^I)^0$
- $(\Delta^I)^0$  enthält alle „nullstelligen Tupel“  
     $\leadsto$  es gibt aber nur ein einziges nullstelliges Tupel  $\langle \rangle$

# Aussagenlogik in Prädikatenlogik darstellen

Aussagenlogische Atome  $p$  kann man durch prädikatenlogische Atome  $p()$  auffassen, wobei  $p$  ein nullstelliges Prädikatensymbol ist.

Sei  $p \in \mathbf{P}$  ein nullstelliges Prädikat

Welche Interpretationen  $p^{\mathcal{I}}$  sind möglich?

- Laut Definition gilt  $p^{\mathcal{I}} \subseteq (\Delta^{\mathcal{I}})^0$
- $(\Delta^{\mathcal{I}})^0$  enthält alle „nullstelligen Tupel“  
     $\leadsto$  es gibt aber nur ein einziges nullstelliges Tupel  $\langle \rangle$
- Also ist  $p^{\mathcal{I}} \subseteq \{\langle \rangle\}$ :
  - $p^{\mathcal{I}} = \{\langle \rangle\}$  bedeutet  $\mathcal{I} \models p()$  („Aussage wahr“)
  - $p^{\mathcal{I}} = \{\}$  bedeutet  $\mathcal{I} \not\models p()$  („Aussage falsch“)

Deshalb kann man nullstellige Prädikate wie aussagenlogische Atome verwenden

In diesem Sinne ist die Aussagenlogik ein Teil der Prädikatenlogik

# Auflösung: Logelei

Im Inselreich der Menschen von Typ W und Typ L fragte Smullyan<sup>1</sup> die Bewohner nach ihren Rauchgewohnheiten:

- Auf **Insel A** antwortete jeder der Bewohner:  
„Jeder, der hier von Typ W ist, raucht.“
- Auf **Insel B** antwortete jeder der Bewohner:  
„Einige von uns hier sind von Typ L und rauchen.“
- Auf **Insel C** hatten alle den gleichen Typ und jeder sagte:  
„Falls ich rauche, dann raucht jeder hier.“
- Auf **Insel D** hatten alle den gleichen Typ und jeder sagte:  
„Einige hier rauchen, aber ich nicht.“

---

<sup>1</sup>R. Smullyan: A Beginner's Guide to Mathematical Logic, Dover 2014

# Auflösung: Logelei

Im Inselreich der Menschen von Typ W und Typ L fragte Smullyan<sup>1</sup> die Bewohner nach ihren Rauchgewohnheiten:

- Auf **Insel A** antwortete jeder der Bewohner:  
„Jeder, der hier von Typ W ist, raucht.“  
**Die Aussage stimmt und alle sind vom Typ W.**
- Auf **Insel B** antwortete jeder der Bewohner:  
„Einige von uns hier sind von Typ L und rauchen.“
- Auf **Insel C** hatten alle den gleichen Typ und jeder sagte:  
„Falls ich rauche, dann raucht jeder hier.“
- Auf **Insel D** hatten alle den gleichen Typ und jeder sagte:  
„Einige hier rauchen, aber ich nicht.“

---

<sup>1</sup>R. Smullyan: A Beginner's Guide to Mathematical Logic, Dover 2014

# Auflösung: Logelei

Im Inselreich der Menschen von Typ W und Typ L fragte Smullyan<sup>1</sup> die Bewohner nach ihren Rauchgewohnheiten:

- Auf **Insel A** antwortete jeder der Bewohner:  
„Jeder, der hier von Typ W ist, raucht.“  
**Die Aussage stimmt und alle sind vom Typ W.**
- Auf **Insel B** antwortete jeder der Bewohner:  
„Einige von uns hier sind von Typ L und rauchen.“  
**Alle sind vom Typ L und keiner raucht.**
- Auf **Insel C** hatten alle den gleichen Typ und jeder sagte:  
„Falls ich rauche, dann raucht jeder hier.“
- Auf **Insel D** hatten alle den gleichen Typ und jeder sagte:  
„Einige hier rauchen, aber ich nicht.“

---

<sup>1</sup>R. Smullyan: A Beginner's Guide to Mathematical Logic, Dover 2014

# Auflösung: Logelei

Im Inselreich der Menschen von Typ W und Typ L fragte Smullyan<sup>1</sup> die Bewohner nach ihren Rauchgewohnheiten:

- Auf **Insel A** antwortete jeder der Bewohner:  
„Jeder, der hier von Typ W ist, raucht.“  
Die Aussage stimmt und alle sind vom Typ W.
- Auf **Insel B** antwortete jeder der Bewohner:  
„Einige von uns hier sind von Typ L und rauchen.“  
Alle sind vom Typ L und keiner raucht.
- Auf **Insel C** hatten alle den gleichen Typ und jeder sagte:  
„Falls ich rauche, dann raucht jeder hier.“  
Alle sagen die Wahrheit; es rauchen alle oder keiner.
- Auf **Insel D** hatten alle den gleichen Typ und jeder sagte:  
„Einige hier rauchen, aber ich nicht.“

---

<sup>1</sup>R. Smullyan: A Beginner's Guide to Mathematical Logic, Dover 2014

# Auflösung: Logelei

Im Inselreich der Menschen von Typ W und Typ L fragte Smullyan<sup>1</sup> die Bewohner nach ihren Rauchgewohnheiten:

- Auf **Insel A** antwortete jeder der Bewohner:  
„Jeder, der hier von Typ W ist, raucht.“  
Die Aussage stimmt und alle sind vom Typ W.
- Auf **Insel B** antwortete jeder der Bewohner:  
„Einige von uns hier sind von Typ L und rauchen.“  
Alle sind vom Typ L und keiner raucht.
- Auf **Insel C** hatten alle den gleichen Typ und jeder sagte:  
„Falls ich rauche, dann raucht jeder hier.“  
Alle sagen die Wahrheit; es rauchen alle oder keiner.
- Auf **Insel D** hatten alle den gleichen Typ und jeder sagte:  
„Einige hier rauchen, aber ich nicht.“  
Alle lügen; es rauchen alle oder keiner.

---

<sup>1</sup>R. Smullyan: A Beginner's Guide to Mathematical Logic, Dover 2014

# Zusammenfassung und Ausblick

Modelltheorie definiert logische Semantik aus der Beziehung von Formeln (Behauptungen) und Modellen (möglichen Welten)

Logisches Schließen ist die Berechnung (Überprüfung) einzelner Beziehungen der Form  $\mathcal{I} \models F$  (Model checking) bzw.  $F \models G$  (Schlussfolgerung)

Prädikatenlogik verallgemeinert Aussagenlogik und viele der dort gültigen Gesetze

Was erwartet uns als nächstes?

- Logisches Schließen: (Un)Entscheidbarkeit und Komplexität
- Resolution für Prädikatenlogik
- Zweites Repetitorium