TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

FORMALE SYSTEME

1. Repititorium: Sprachen, Grammatiken und Automaten

Stephan Mennicke

Professur für Wissensbasierte Systeme

TU Dresden, 11. Dezember 2023

Aufgabe S1)

Es sei $\Sigma_1 = \{a, b, c\}$ und $\Sigma_2 = \{0, 1\}$. Beschreiben Sie folgende Mengen verbal oder durch Aufzählung:

${\Sigma_1}^*$ Menge aller Wörter über a, b, c:
$\{\varepsilon, a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc, aaa \dots\}$

${\Sigma_1}^+$ Menge aller nicht-leeren Wörter über a, b, c:
$\{a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc, aaa, \dots\}$

${\Sigma_1}^2$ Menge aller Wörter über a, b, c mit Länge 2:
$\{aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc\}$

$\Sigma_1 \circ (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)^*$ Menge aller Wörter über $a, b, c, 0, 1$, die mit a, b, oder c beginnen

$\mathcal{P}(\Sigma_1)$ Menge aller Teilmengen von Σ_1: $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

$\mathcal{P}({\Sigma_1}^*)$ Menge aller Teilmengen von Σ_1^*, d.h. Menge aller formalen Sprachen über Σ_1

Aufgabe S2)

Beschreiben Sie folgende Mengen, die über die Operationen Vereinigung, Konkatenation und Kleene-Stern gebildet werden, verbal oder durch Aufzählung:

$\{a\} \cup \{b\} \cup \{c\}$: $\{a, b, c\}$

$\{a\} \circ \{b\} \circ \{c\}$: $\{abc\}$

$\{a\} \cup \{b\} \circ \{a\} \cup \{b\}$: $\{a, ba, b\}$

$\{a\}^*$: $\{\varepsilon, a, aa, aaa, aaaa, \ldots\}$

$(\{a\} \cup \{b\} \cup \{c\})^*$: $\{\varepsilon, a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc, aaa, \ldots\}$

$(\{a\} \circ \{b\} \circ \{c\})^*$: $\{\varepsilon, abc, abcabc, abcabcabc, \ldots\}$

$\{a\} \cup \{a\}^* \circ \{b\}$: $\{a, b, ab, aab, aaab, aaaab, \ldots\}$

$(\{0\} \cup \{1\})^*$: Wörter über $0, 1$: $\{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, \ldots\}$

$(\{1\} \cup \{1\} \circ \{0\})^*$: $\{\varepsilon, 1, 10, 11, 111, 1010, 1011, 1110, 1111, 101010, 10101010, \ldots\}$

$(\{0\} \cup \{1\})^* \circ \{0\} \circ \{0\} \circ (\{0\} \cup \{1\})^*$: Wörter über $0, 1$ mit Infix 00:
$\{00, 000, 100, 001, 0000, 1000, 0001, \ldots\}$

Aufgabe S4)

Zeigen oder widerlegen Sie folgende Identität: $({L_1}^* \circ {L_2}^*)^* = (L_1 \cup L_2)^*$.

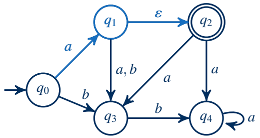
- Sei $w \in (L_1^* \circ L_2^*)^*$. Falls $w = \varepsilon$, dann $w =\in (L_1 \cup L_2)^*$.
- Sonst ist $w = w_0 w_1 \cdots w_n$ mit $w_i \in (L_1^* \circ L_2^*)$.
- Jedes w_i ist zerlegbar als $w_i = x_i y_i$ mit $x_i \in L_1^*, y_i \in L_2^*$.
- Damit Zerlegung $w = v_0 v_1 \cdots v_k$ mit $v_j \in L_1 \cup L_2$ $(0 \leq j \leq k)$.
- Also $w \in (L_1 \cup L_2)^*$.

- Sei umgekehrt $w \in (L_1 \cup L_2)^*$. Falls $w = \varepsilon$, dann $w \in (L_1^* \circ L_2^*)^*$.
- Ansonsten ist $w = w_0 w_1 \cdots w_n$ mit $w_i \in (L_1 \cup L_2)$.
- Falls $w_i \in L_1$, dann ist $w_i = w_i \varepsilon \in L_1^* \circ L_2^*$.
- Analog $w_i \in L_1^* \circ L_2^*$, falls $w_i \in L_2$.
- Also $w \in (L_1^* \circ L_2^*)^*$.

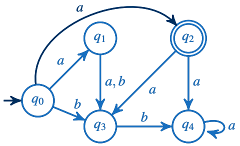
Damit ist die Behauptung bewiesen.

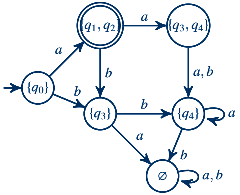
Aufgabe S5)

Konstruieren Sie einen äquivalenten DFA $\mathcal{M}'$ zum ε-NFA
$\mathcal{M} = (\{q_0, \dots, q_4\}, \{a, b\}, \delta, \{q_0\}, \{q_2\})$, wobei δ folgend dargestellt ist:



- Elimiere ε-Kante durch „Verlängern nach rechts“
- Potenzmengenkonstruktion liefert DFA $\mathcal{M}'$:



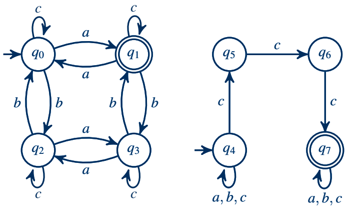


Aufgabe S6a)

Es sei $\Sigma = \{a, b, c\}$. Geben Sie einen NFA $\mathcal{M}_1$ an mit $w \in L(\mathcal{M}_1)$ genau dann, wenn

- $|w|_a$ ist ungerade und $|w|_b$ ist gerade,
- oder es gibt $u, v \in \Sigma^*$ mit $w = ucccv$.

$\mathcal{M}_1 = (\{q_0, q_1, \ldots, q_7\}, \Sigma, \delta, \{q_0, q_4\}, \{q_1, q_7\})$ mit

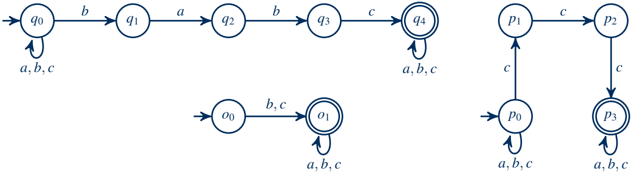


Aufgabe S6b)

Es sei $\Sigma = \{a, b, c\}$. Geben Sie einen NFA $\mathcal{M}_2$ an mit $w \in L(\mathcal{M}_2)$ genau dann, wenn

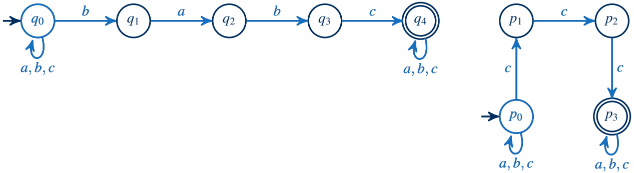
- es gibt $u, v \in \Sigma^*$ mit $w = ubabcv$,
- es gibt $u, v \in \Sigma^*$ mit $w = ucccv$, und
- es gibt kein $u \in \Sigma^*$ mit $w = au$.

$\mathcal{M}_2$ entsteht als Produktautomat der folgenden drei Automaten:

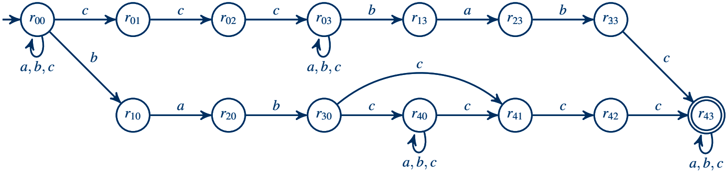


Aufgabe S6b)

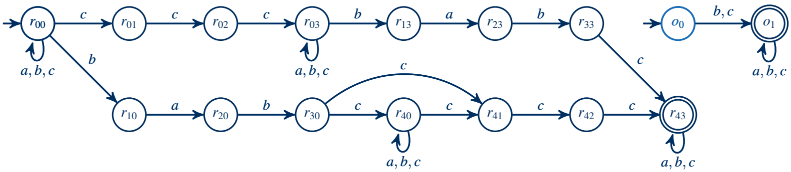
Erstes Produkt:



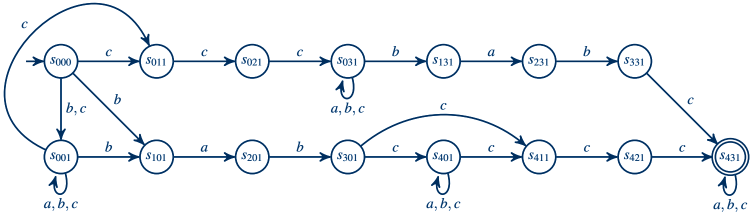
Konstruktion des Produktautomaten:



Aufgabe S6b)



Konstruktion von $\mathcal{M}_2$:



Aufgabe S7)

Gegeben ist die kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, X, Y, T\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und
$P = \{S \to X \mid Y, X \to Tb \mid Xb, Y \to aT \mid aY, T \to \varepsilon \mid aTb\}$.

Geben Sie eine Grammatik G' an mit $L(G') = \{w \in \{a, b\}^* \mid w^R \in L(G)\}$, wobei w^R das gespiegelte Wort zu w ist.

$G' = (V, \Sigma, P', S)$ mit $P' = \{A \to w^R \mid A \to w \in P, A \in V, w \in (\Sigma \cup V)^*\}$,

d.h.

$$\begin{aligned} P' = \{ & S \to X \mid Y, \\ & X \to bT \mid bX, \\ & Y \to Ta \mid Ya, \\ & T \to \varepsilon \mid bTa\}. \end{aligned}$$

Aufgabe S8)

Gegeben ist die kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, X, Y, T\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und
$P = \{S \to X \mid Y, X \to Tb \mid Xb, Y \to aT \mid aY, T \to \varepsilon \mid aTb\}$.

Ist G eine ε-freie Grammatik? Wenn nicht, transformieren Sie G in eine ε-freie Grammatik G'. Begründen Sie Ihre Vorgehensweise.

- G ist nicht ε-frei wegen $T \to \varepsilon$ und $X \to Tb$
- ε-Variablen $V_\varepsilon = \{A \in V \mid A \to \varepsilon \in P\} = \{T\}$.
- streiche ε-Regeln: $P' = \{S \to X \mid Y, X \to Tb \mid Xb, Y \to aT \mid aY, T \to aTb\}$.
- Füge alle $B \to xy$ für $B \to xAy \in P'$ mit $A \in V_\varepsilon$, $|xy| \geq 1$ hinzu:

$$
\begin{aligned}
P' = \{S &\to X \mid Y, & X &\to Tb \mid Xb \mid b, \\
Y &\to aT \mid aY \mid a, & T &\to aTb \mid ab\}.
\end{aligned}
$$

- $G' = (V, \Sigma, P', S)$ ist die gesuchte ε-freie Grammatik.

Aufgabe S9)

Geben Sie für jede der folgenden Grammatiken den maximalen Chomsky-Typ j an.
Begründen Sie Ihre Antwort:

- $G_1 = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aS, S \to Sb, S \to a\}, S)$

  Typ 2, aber wegen $S \to aS$ und $S \to Sb$ nicht Typ 3
- $G_2 = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aS, S \to SbS, S \to a\}, S)$

  Typ 2, aber wegen $S \to SbS$ nicht Typ 3
- $G_3 = (\{S, B\}, \{a, b\}, \{S \to \varepsilon \mid aSb, aS \to aB, B \to bB \mid b\}, S)$

  Typ 0, aber wegen $aS \to aB$ nicht Typ 2, und wegen $S \to \varepsilon \mid aSb$ nicht Typ 1
- $G_4 = (\{S, A\}, \{a, b\}, \{S \to a, A \to b\}, S)$

  Typ 3

Aufgabe S10)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Für den regulären Ausdruck $\alpha = (b(ab \mid b)^*)^*(a \mid b)^*a$ gilt: $aba \in L(\alpha)$.

   wahr: $aba \in L\Big((b(ab \mid b)^*)^0(a \mid b)^2a\Big)$

2. Für die Grammatik $G = (\{S, X, Y, Z\}, \{a, b\}, \{S \to Y,\ X \to b,\ Y \to aYYb, aY \to aZ,\ ZY \to ZX,\ Z \to a\}, S)$
   gilt: $aabb \in L(G)$.

   wahr: $S \to Y \to aYYb \to aZYb \to aZXb \to aaXb \to aabb$

Aufgabe S11)

Sei $\Sigma_1 = \{a, b\}$ und $\Sigma_2 = \{a, b, c\}$. Geben Sie für jede der folgenden Sprachen L_i einen regulären Ausdruck α_i mit $L_i = L(\alpha_i)$ an. Begründen Sie die von Ihnen gewählten regulären Ausdrücke α_i.

- $L_1 = \{w \in \Sigma_1^* \mid w$ beginnt mit a und $|w|_b$ ist gerade$\}$:

  $\alpha_1 = a(a^*ba^*b)^*a^*$
- $L_2 = \{w \in \Sigma_2^* \mid w$ beginnt mit a und $|w|_b$ ist gerade$\}$:

  $\alpha_2 = a((a|c)^*b(a|c)^*b)^*(a|c)^*$
- $\alpha_3 = \{w \in \Sigma_1^* \mid$ es gibt kein $u, v \in \Sigma_1^*$ mit $w = uaav\}$:

  $\alpha_3 = b^*(ab^+)^*(a|\varepsilon)$
- $L_4 = \{w \in \Sigma_2^* \mid$ es gibt kein $u, v \in \Sigma_2^*$ mit $w = uaav\}$:

  $\alpha_4 = (b|c)^*(a(b|c)^+)^*(a|\varepsilon)$