

Theoretische Informatik und Logik

9. Übungsblatt

Sommersemester 2021

Die folgenden Aufgaben werden nicht in den Übungen besprochen und dienen der Selbstkontrolle.

Aufgabe Q

Geben Sie für die Formel

$$F = \forall x. \exists y. (p(c_1, z) \wedge (q(x, c_2, z) \vee p(c_2, y))),$$

wobei c_1, c_2 Konstanten sind, folgendes an:

- die Menge aller Teilformeln;
- die Menge aller Terme;
- die Menge aller Variablen, mit Unterscheidung freier und gebundener Variablen;
- ein Interpretation \mathcal{I} und eine Zuweisung \mathcal{Z} für \mathcal{I} , so dass $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models F$.

Aufgabe R

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- Es gilt $\{F\} \models G$ genau dann, wenn $F \rightarrow G$ allgemeingültig ist.
- Es gilt $\{F_1, \dots, F_k\} \models G$ genau dann, wenn $\bigwedge_{i=1}^k F_i \rightarrow G$ allgemeingültig ist.

Aufgabe S

Seien F, G Formeln und x eine Variable. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\exists x. (F \rightarrow G) \equiv \forall x. F \rightarrow \exists x. G.$$

Aufgabe 1

Welche der angegebenen Strukturen sind Modelle der folgenden Formel?

$$\forall x. p(x, x) \wedge \forall x, y. ((p(x, y) \wedge p(y, x)) \rightarrow x \approx y) \wedge \forall x, y, z. ((p(x, y) \wedge p(y, z)) \rightarrow p(x, z))$$

- \mathcal{I}_1 mit Grundmenge \mathbb{N} und $p^{\mathcal{I}_1} = \{(m, n) \mid m < n\}$;
- \mathcal{I}_2 mit Grundmenge \mathbb{N} und $p^{\mathcal{I}_2} = \{(n, n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$;
- \mathcal{I}_3 mit Grundmenge \mathbb{N} und $p^{\mathcal{I}_3} = \{(m, n) \mid m \text{ teilt } n\}$;
- \mathcal{I}_4 mit Grundmenge Σ^* für ein Alphabet Σ und $p^{\mathcal{I}_4} = \{(x, y) \mid x \text{ ist Präfix von } y\}$;
- \mathcal{I}_5 mit Grundmenge 2^M für eine Menge M und $p^{\mathcal{I}_5} = \{(X, Y) \mid X \subseteq Y\}$.

Aufgabe 2

- a) Geben Sie je eine erfüllbare Formel in Prädikatenlogik mit Gleichheit an, so dass alle Modelle
- (a) höchstens drei,
 - (b) mindestens drei,
 - (c) genau drei
- Elemente in der Grundmenge besitzen.
- b) Geben Sie je eine erfüllbare Formel in Prädikatenlogik mit Gleichheit an, so dass das zweistellige Relationensymbol ρ in jedem Modell als der Graph einer
- (a) injektiven Funktion,
 - (b) surjektiven Funktion,
 - (c) bijektiven Funktion
- interpretiert wird.
- (Der Graph einer Funktion $f: A \rightarrow B$ ist die Relation $\{(x, y) \in A \times B \mid f(x) = y\}$.)

Aufgabe 3

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

- a) Sind Γ und Γ' Mengen von prädikatenlogischen Formeln, dann folgt aus $\Gamma \subseteq \Gamma'$ und $\Gamma \models F$ auch $\Gamma' \models F$.
- b) Jede aussagenlogische Formel ist eine prädikatenlogische Formel.
- c) Eine prädikatenlogische Formel F ist genau dann allgemeingültig, wenn $\neg F$ unerfüllbar ist.
- d) Es gilt

$$\{\forall x, y. (\rho(x, y) \rightarrow \rho(y, x)), \forall x, y, z. ((\rho(x, y) \wedge \rho(y, z)) \rightarrow \rho(x, z))\} \models \forall x. \rho(x, x).$$

Aufgabe 4

Formalisieren Sie Bertrand Russells Barbier-Paradoxon

Der Barbier rasiert genau diejenigen Personen, die sich nicht selbst rasieren.

als eine prädikatenlogische Formel und zeigen Sie, dass diese unerfüllbar ist.