TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Informatik, Institut für Künstliche Intelligenz, Professur Computational Logic

Dr. habil. Hannes Straß

Dr. Dörthe Arndt

Übungen zur Lehrveranstaltung

Formale Systeme

Wintersemester 2021/22

6. Übungsblatt

Woche vom 22. bis 26. November 2021

Aufgabe zur Selbstkontrolle (diese werden in den Übungen nicht besprochen)

S11) Sei $\Sigma_1 = \{a, b\}$ und $\Sigma_2 = \{a, b, c\}$. Geben Sie für jede der folgenden Sprachen L_i einen regulären Ausdruck α_i mit $L_i = L(\alpha_i)$ an. Begründen Sie die von Ihnen gewählten regulären Ausdrücke α_i.

(a) $L_1 = \{w \in \Sigma_1^* \mid w \text{ beginnt mit } a \text{ und } |w|_b \text{ ist gerade}\}$

(b) $L_2 = \{w \in \Sigma_2^* \mid w \text{ beginnt mit } a \text{ und } |w|_b \text{ ist gerade}\}$

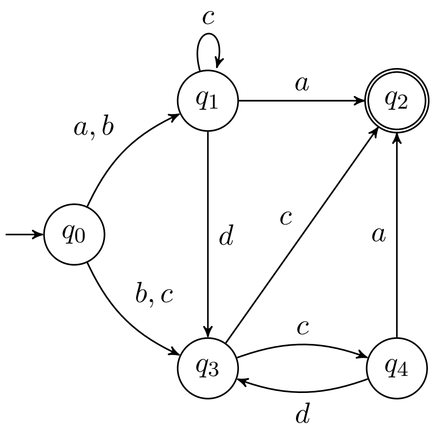
(c) $L_3 = \{w \in \Sigma_1^* \mid \text{es gibt kein } u, v \in \Sigma_1^* \text{ mit } w = uaav\}$

(d) $L_4 = \{w \in \Sigma_2^* \mid \text{es gibt kein } u, v \in \Sigma_2^* \text{ mit } w = uaav\}$

S12) Wiederholen Sie die Begriffe Potenzmengenkonstruktion, erreichbarer Zustand, äquivalente Zustände, Quotientenautomat, reduzierter Automat und *Nerode*-Rechtskongruenz.

Aufgabe 1

Gegeben ist der NFA $\mathcal{M} = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a, b, c, d\}, \delta, \{q_0\}, \{q_2\})$ mit δ:



a) Geben Sie für jedes $z \in \{bc, adc, cda, bcdc, acdc\}$ alle Zerlegungen $z = uvw$ mit $u, w \in \Sigma^*$, $v \in \Sigma^+$ an, sodass für alle $k \geq 0$ gilt: $uv^kw \in L(\mathcal{M})$. Begründen Sie Ihre Antworten.

b) Ermitteln Sie eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, sodass für alle $z \in L(\mathcal{M})$ mit $|z| \geq n$ gilt, dass eine Zerlegung $z = uvw$ mit $u, w \in \Sigma^*$, $v \in \Sigma^+$ und $|uv| \leq n$ existiert, sodass für alle $k \geq 0$ gilt: $uv^kw \in L(\mathcal{M})$.

Aufgabe 2

Gegeben ist das Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Welche der folgenden Sprachen L_j über Σ mit $1 \leq j \leq 2$ ist regulär? Beweisen Sie Ihre jeweilige Antwort.

a) $L_1 = \{a^ib^i \mid 1 \leq i \leq 15\}$

b) $L_2 = \{a^nb^ma^{n \cdot m} \mid n, m \geq 0\}$

Aufgabe 3

Beweisen oder widerlegen Sie unter Verwendung von Resultaten aus der Vorlesung folgende Aussagen.

a) Für die Grammatik $G = (\{S, X, Y, Z\}, \{a, b\}, \{S \to Y,\ X \to b,\ Y \to aYYb,\ aY \to aZ,\ ZY \to ZX,\ Z \to a\}, S)$ gilt: $abab \in L(G)$.

b) Kann eine Sprache L von einem DFA erkannt werden, so gibt es auch einen ε-NFA $\mathcal{M}$ mit $L(\mathcal{M}) = L$.

c) Für jeden NFA $\mathcal{M}$ mit Wortübergängen gibt es einen äquivalenten NFA.

d) Es gibt eine reguläre Sprache, für welche die Anzahl der Äquivalenzklassen der zugehörigen *Nerode*-Rechtskongruenz endlich ist.

e) Wenn es für eine Sprache L ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass die *Nerode*-Rechtskongruenz $\simeq_L$ höchstens n Äquivalenzklassen hat, so kann L von einem DFA erkannt werden.

f) Für jede Sprache L gilt: $L = \bigcup_{u \in L} [u]_{\simeq_L}$, d. h. L ist die Vereinigung von $\simeq_L$-Klassen.

Aufgabe 4

Betrachten Sie die Grammatik

$$G_0 = (\{S, T, U, V, R\}, \{a, b\}, \{S \longrightarrow \varepsilon, S \longrightarrow aSb, S \longrightarrow T, S \longrightarrow R, T \longrightarrow bbT, T \longrightarrow U,$$
$$U \longrightarrow aaU, U \longrightarrow bbT, V \longrightarrow bSa, R \longrightarrow \varepsilon, R \longrightarrow bSa\}, S)\ .$$

a) Konstruieren Sie eine zu G_0 äquivalente Grammatik G_1, die (außer $S' \longrightarrow \varepsilon$ für Startsymbol S') keine weiteren Regeln der Form $A \longrightarrow \varepsilon$ für ein Nichtterminalsymbol A enthält. Erweitern Sie dazu, wenn nötig, die Grammatik G_0 um ein neues Startsymbol S' und entsprechende Regeln.

b) Geben Sie zu G_1 eine äquivalente Grammatik G_2 an, die keine Kettenregeln, also Produktionen der Form $A \longrightarrow B$ mit Nichtterminalsymbolen A, B, enthält.

c) Geben Sie eine Grammatik G_3 in Chomsky-Normalform an mit $L(G_3) = L(G_2) \setminus \{\varepsilon\}$.

Aufgabe 5

Gegeben ist folgende Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit

$V = \{S, X, M, A, B\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und
$$P = \{S \longrightarrow \varepsilon, S \longrightarrow AX, S \longrightarrow AB, X \longrightarrow MB, M \longrightarrow AB, M \longrightarrow AX, A \longrightarrow a,$$
$$B \longrightarrow a, B \longrightarrow b\}\ .$$

Verwenden Sie den CYK-Algorithmus (mit der Matrix-Notation aus der Vorlesung), um für die folgenden Wörter w_i zu entscheiden, ob $w_i \in L(G)$ ist.

a) $w_1 = aaabba$

b) $w_2 = aabbaa$