



# FORMALE SYSTEME

## 4. Vorlesung: Nichtdeterministische Endliche Automaten

Markus Krötzsch

Lehrstuhl Wissensbasierte Systeme

TU Dresden, 20. Oktober 2016

# Rückblick

# Wiederholung

- Grammatiken können Sprachen beschreiben und sie grob in Typen unterteilen
- Typ-3-Grammatiken generieren reguläre Sprachen
- Deterministische endliche Automaten erkennen reguläre Sprachen
- Nichtdeterministische endliche Automaten verallgemeinern die Definition der Übergangsfunktion:  
der Automat „rät“, welcher Übergang der richtige ist

# Wiederholung: NFA

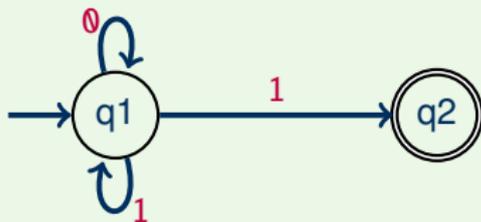
Ein **nichtdeterministischer endlicher Automat** (international: „NFA“)  $\mathcal{M}$  ist ein Tupel  $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F \rangle$  mit den folgenden Bestandteilen:

- $Q$ : endliche Menge von **Zuständen**
- $\Sigma$ : Alphabet
- $\delta$ : **Übergangsfunktion**, eine totale Funktion  $Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$ , wobei  $2^Q$  die Potenzmenge von  $Q$  ist
- $Q_0$ : Menge möglicher **Startzustände**  $Q_0 \subseteq Q$
- $F$ : Menge von **Endzuständen**  $F \subseteq Q$

**Notation:** Wir schreiben statt  $q' \in \delta(q, a)$  auch  $q \xrightarrow{a} q'$ .

# Beispiel: NFA

Beispiel:



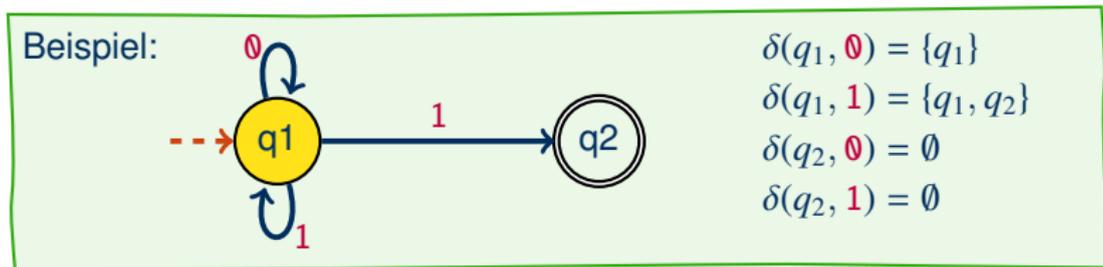
$$\delta(q_1, 0) = \{q_1\}$$

$$\delta(q_1, 1) = \{q_1, q_2\}$$

$$\delta(q_2, 0) = \emptyset$$

$$\delta(q_2, 1) = \emptyset$$

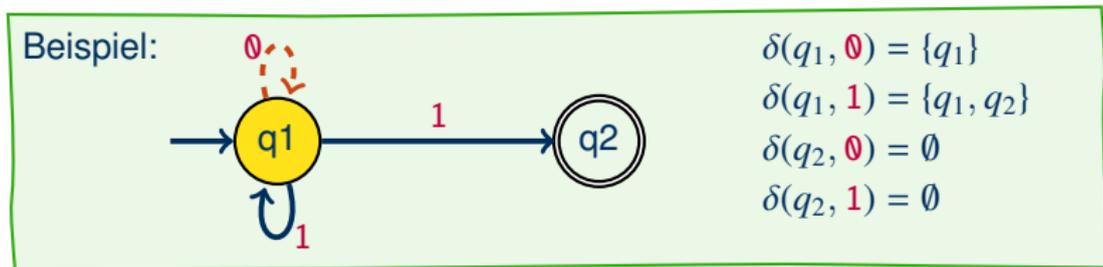
# Beispiel: NFA



**Wort**    **Zustandsfolge**    **Ergebnis**

011     $q_1$

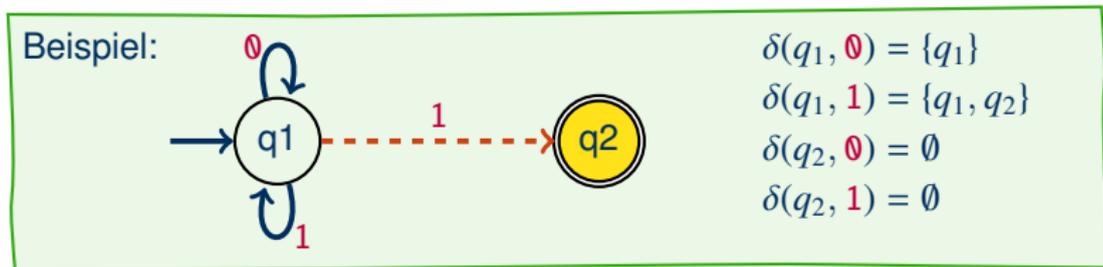
# Beispiel: NFA



Wort	Zustandsfolge	Ergebnis
------	---------------	----------

011	$q_1 q_1$	
-----	-----------	--

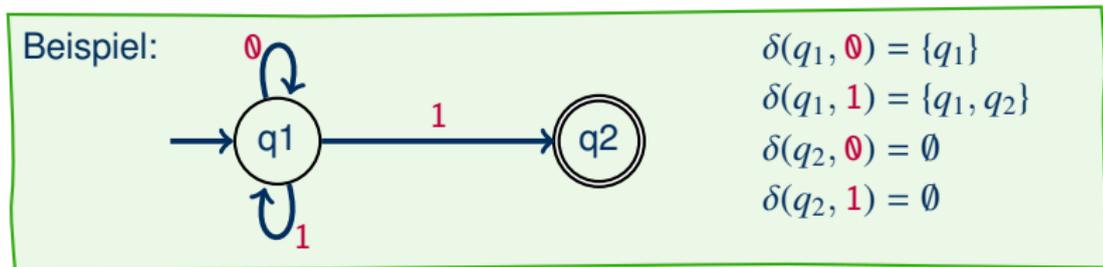
# Beispiel: NFA



Wort	Zustandsfolge	Ergebnis
------	---------------	----------

011	$q_1 q_1 q_2$	
-----	---------------	--

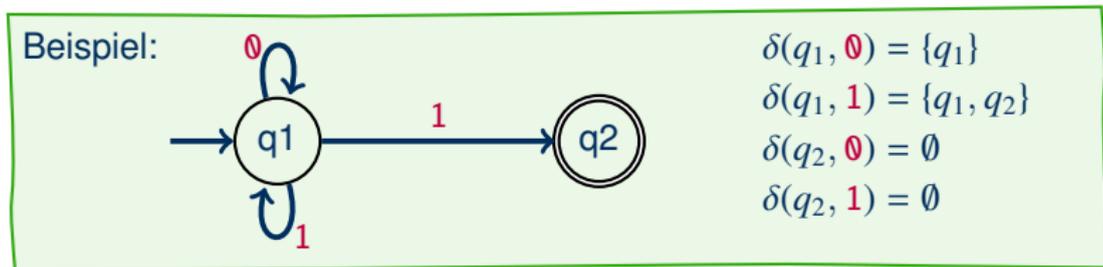
# Beispiel: NFA



**Wort**    **Zustandsfolge**    **Ergebnis**

011     $q_1 q_1 q_2 ?$

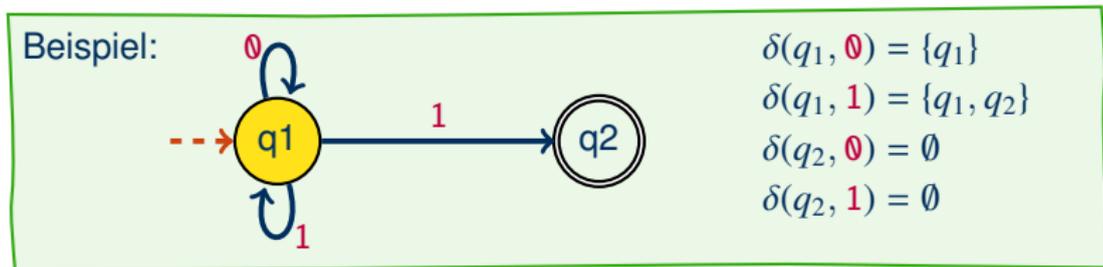
# Beispiel: NFA



Wort	Zustandsfolge	Ergebnis
------	---------------	----------

011	$q_1 q_1 q_2 ?$	abgelehnt (fehlender Übergang)
-----	-----------------	--------------------------------

# Beispiel: NFA

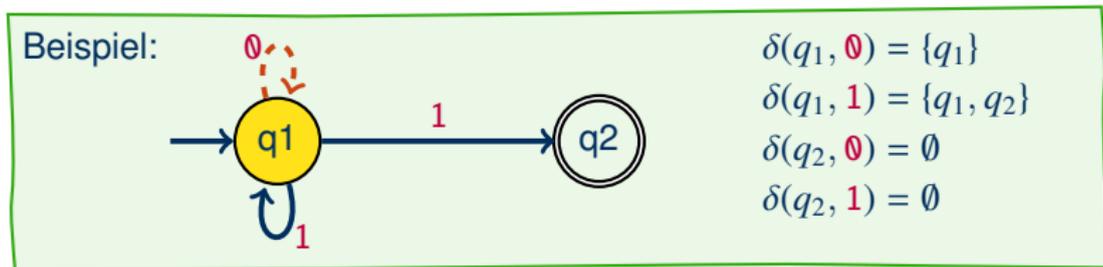


Wort	Zustandsfolge	Ergebnis
------	---------------	----------

011	$q_1 q_1 q_2 ?$	abgelehnt (fehlender Übergang)
-----	-----------------	--------------------------------

011	$q_1$	
-----	-------	--

# Beispiel: NFA

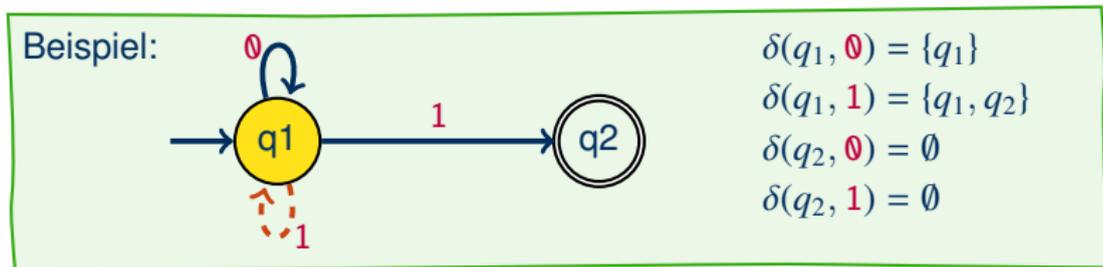


Wort	Zustandsfolge	Ergebnis
------	---------------	----------

011	$q_1 q_1 q_2 ?$	abgelehnt (fehlender Übergang)
-----	-----------------	--------------------------------

011	$q_1 q_1$	
-----	-----------	--

# Beispiel: NFA

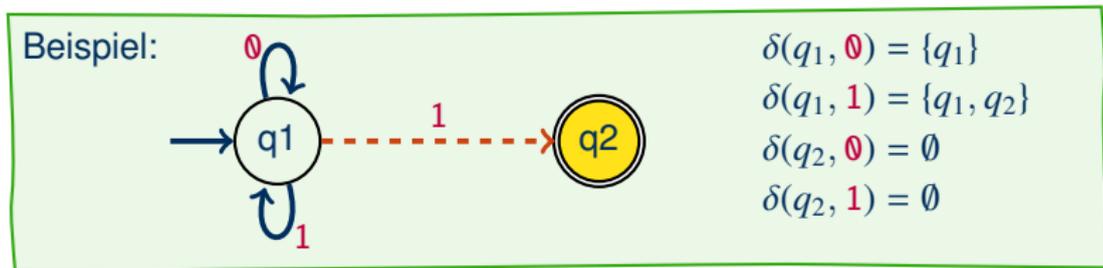


Wort	Zustandsfolge	Ergebnis
------	---------------	----------

011	$q_1 q_1 q_2 ?$	abgelehnt (fehlender Übergang)
-----	-----------------	--------------------------------

011	$q_1 q_1 q_1$	
-----	---------------	--

# Beispiel: NFA

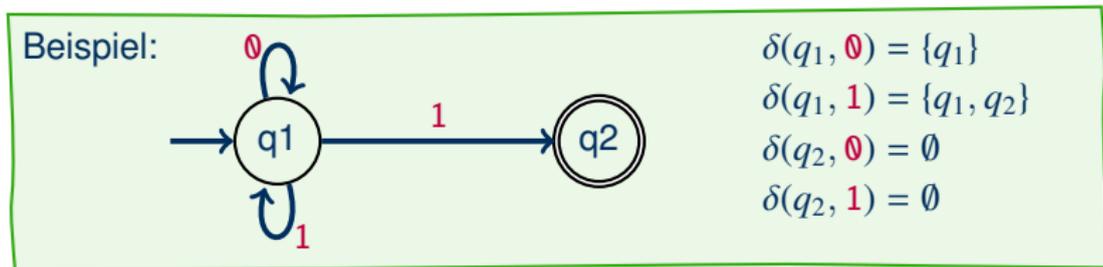


Wort	Zustandsfolge	Ergebnis
------	---------------	----------

011	$q_1 q_1 q_2 ?$	abgelehnt (fehlender Übergang)
-----	-----------------	--------------------------------

011	$q_1 q_1 q_1 q_2$	
-----	-------------------	--

# Beispiel: NFA

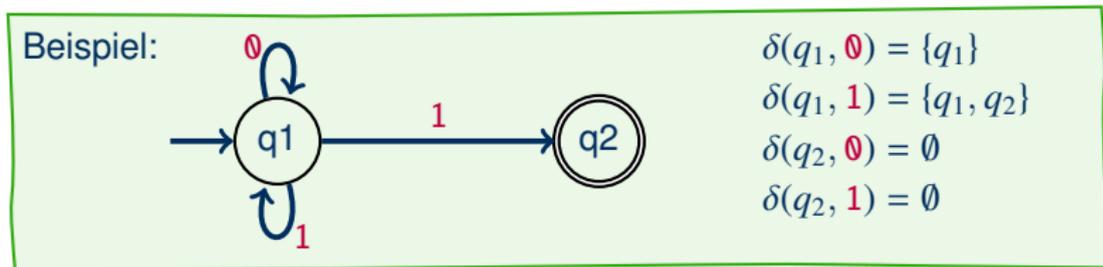


Wort	Zustandsfolge	Ergebnis
------	---------------	----------

011	$q_1 q_1 q_2 ?$	abgelehnt (fehlender Übergang)
-----	-----------------	--------------------------------

011	$q_1 q_1 q_1 q_2$	akzeptiert
-----	-------------------	------------

# Beispiel: NFA



Wort	Zustandsfolge	Ergebnis
------	---------------	----------

011	$q_1 q_1 q_2 ?$	abgelehnt (fehlender Übergang)
-----	-----------------	--------------------------------

011	$q_1 q_1 q_1 q_2$	akzeptiert
-----	-------------------	------------

↪ 011 wird nichtdeterministisch akzeptiert

# Die Sprache eines NFA

# Läufe eines NFA

Ein **Lauf** eines NFA  $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F \rangle$  für ein Wort  $w = \sigma_1 \cdots \sigma_n$  ist eine Folge von Zuständen  $q_0 \dots q_m$ , so dass gilt:

- $q_0 \in Q_0$
- $q_{i+1} \in \delta(q_i, \sigma_i)$  für alle  $0 \leq i < m$
- (1)  $m = |w| = n$  oder (2)  $m < n$  und  $\delta(q_m, \sigma_m) = \emptyset$

Ein Lauf heißt **akzeptierend**, falls  $m = n$  und  $q_n \in F$ . Andernfalls heißt der Lauf **verwerfend**.

↪ Ein DFA hat genau einen Lauf für jedes Wort.

Er akzeptiert wenn dieser Lauf akzeptierend ist.

↪ Ein NFA kann für ein Wort mehrere Läufe haben.

Er akzeptiert wenn einer dieser Läufe akzeptierend ist.

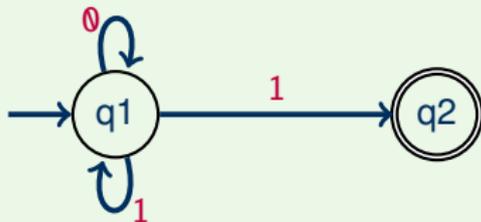
# Sprache eines NFA

Die **Sprache eines NFA**  $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F \rangle$  ist die Menge aller Wörter  $w$  für die  $\mathcal{M}$  einen akzeptierenden Lauf hat.

# Sprache eines NFA

Die **Sprache eines NFA**  $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F \rangle$  ist die Menge aller Wörter  $w$  für die  $\mathcal{M}$  einen akzeptierenden Lauf hat.

Beispiel:



$$\delta(q_1, 0) = \{q_1\}$$

$$\delta(q_1, 1) = \{q_1, q_2\}$$

$$\delta(q_2, 0) = \emptyset$$

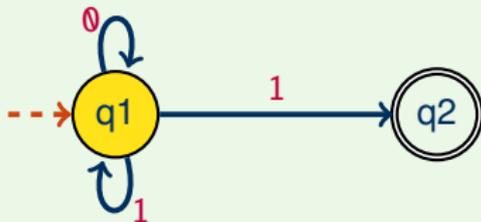
$$\delta(q_2, 1) = \emptyset$$

Wort	Lauf	Ergebnis
011	$q_1 q_1 q_2$	verwerfend (zu kurz)
011	$q_1 q_1 q_1 q_2$	akzeptierend
011		

# Sprache eines NFA

Die **Sprache eines NFA**  $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F \rangle$  ist die Menge aller Wörter  $w$  für die  $\mathcal{M}$  einen akzeptierenden Lauf hat.

Beispiel:



$$\delta(q_1, 0) = \{q_1\}$$

$$\delta(q_1, 1) = \{q_1, q_2\}$$

$$\delta(q_2, 0) = \emptyset$$

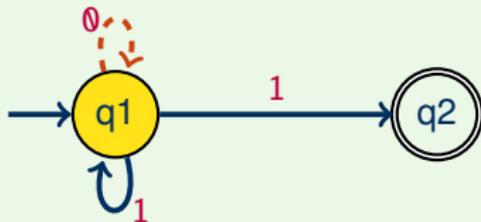
$$\delta(q_2, 1) = \emptyset$$

Wort	Lauf	Ergebnis
011	$q_1 q_1 q_2$	verwerfend (zu kurz)
011	$q_1 q_1 q_1 q_2$	akzeptierend
011	$q_1$	

# Sprache eines NFA

Die **Sprache eines NFA**  $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F \rangle$  ist die Menge aller Wörter  $w$  für die  $\mathcal{M}$  einen akzeptierenden Lauf hat.

Beispiel:



$$\delta(q_1, 0) = \{q_1\}$$

$$\delta(q_1, 1) = \{q_1, q_2\}$$

$$\delta(q_2, 0) = \emptyset$$

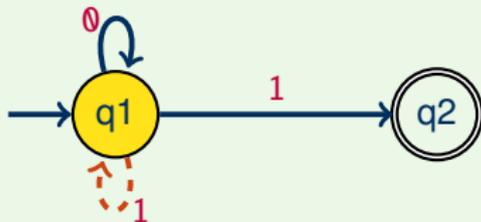
$$\delta(q_2, 1) = \emptyset$$

Wort	Lauf	Ergebnis
011	$q_1 q_1 q_2$	verwerfend (zu kurz)
011	$q_1 q_1 q_1 q_2$	akzeptierend
011	$q_1 q_1$	

# Sprache eines NFA

Die **Sprache eines NFA**  $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F \rangle$  ist die Menge aller Wörter  $w$  für die  $\mathcal{M}$  einen akzeptierenden Lauf hat.

Beispiel:



$$\delta(q_1, 0) = \{q_1\}$$

$$\delta(q_1, 1) = \{q_1, q_2\}$$

$$\delta(q_2, 0) = \emptyset$$

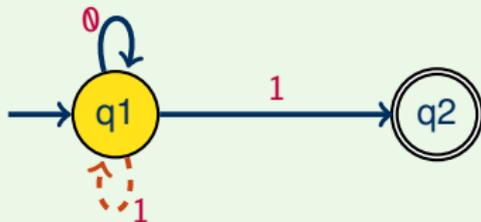
$$\delta(q_2, 1) = \emptyset$$

Wort	Lauf	Ergebnis
011	$q_1 q_1 q_2$	verwerfend (zu kurz)
011	$q_1 q_1 q_1 q_2$	akzeptierend
011	$q_1 q_1 q_1$	

# Sprache eines NFA

Die **Sprache eines NFA**  $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F \rangle$  ist die Menge aller Wörter  $w$  für die  $\mathcal{M}$  einen akzeptierenden Lauf hat.

Beispiel:



$$\delta(q_1, 0) = \{q_1\}$$

$$\delta(q_1, 1) = \{q_1, q_2\}$$

$$\delta(q_2, 0) = \emptyset$$

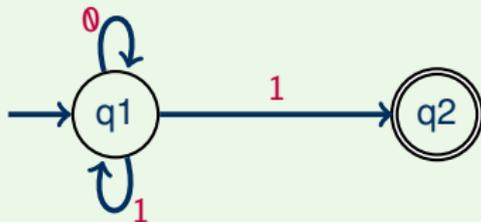
$$\delta(q_2, 1) = \emptyset$$

Wort	Lauf	Ergebnis
011	$q_1 q_1 q_2$	verwerfend (zu kurz)
011	$q_1 q_1 q_1 q_2$	akzeptierend
011	$q_1 q_1 q_1 q_1$	

# Sprache eines NFA

Die **Sprache eines NFA**  $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F \rangle$  ist die Menge aller Wörter  $w$  für die  $\mathcal{M}$  einen akzeptierenden Lauf hat.

Beispiel:



$$\delta(q_1, 0) = \{q_1\}$$

$$\delta(q_1, 1) = \{q_1, q_2\}$$

$$\delta(q_2, 0) = \emptyset$$

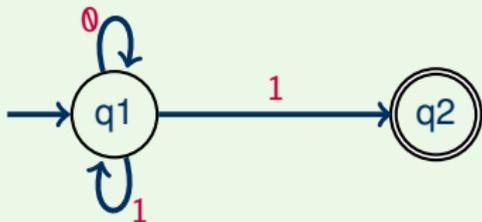
$$\delta(q_2, 1) = \emptyset$$

Wort	Lauf	Ergebnis
011	$q_1 q_1 q_2$	verwerfend (zu kurz)
011	$q_1 q_1 q_1 q_2$	akzeptierend
011	$q_1 q_1 q_1 q_1$	verwerfend (kein Endzustand)

# Sprache eines NFA

Die **Sprache eines NFA**  $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F \rangle$  ist die Menge aller Wörter  $w$  für die  $\mathcal{M}$  einen akzeptierenden Lauf hat.

Beispiel:



$$\delta(q_1, 0) = \{q_1\}$$

$$\delta(q_1, 1) = \{q_1, q_2\}$$

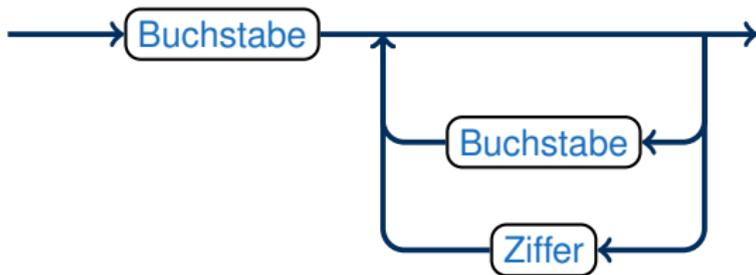
$$\delta(q_2, 0) = \emptyset$$

$$\delta(q_2, 1) = \emptyset$$

Wort	Lauf	Ergebnis
011	$q_1 q_1 q_2$	verwerfend (zu kurz)
011	$q_1 q_1 q_1 q_2$	akzeptierend
011	$q_1 q_1 q_1 q_1$	verwerfend (kein Endzustand)

$$L(\mathcal{M}) = \{0, 1\}^* \circ \{1\}$$

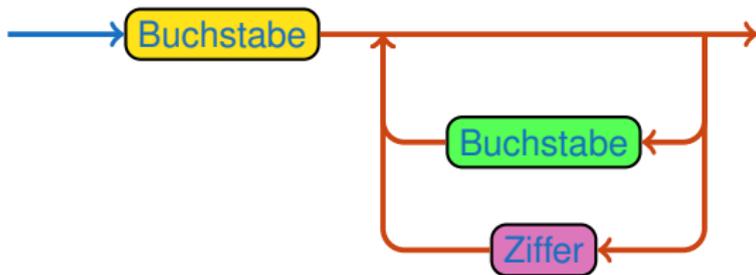
# NFA zur Darstellung von Syntaxdiagrammen



Übersetzung in NFA:

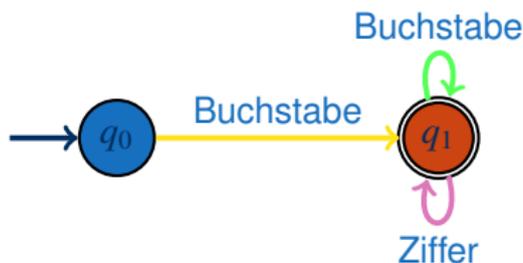
- zusammenhängende Linienbereiche werden Zustände
- Knoten werden Übergänge

# NFA zur Darstellung von Syntaxdiagrammen

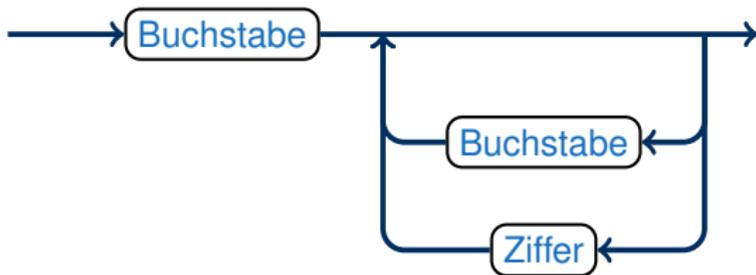


Übersetzung in NFA:

- zusammenhängende Linienbereiche werden Zustände
- Knoten werden Übergänge

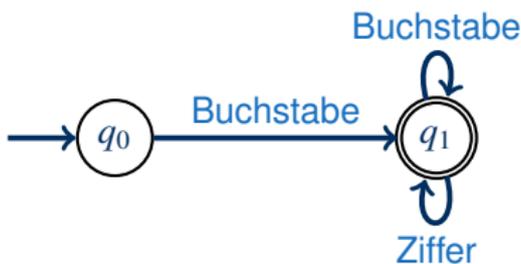


# NFA zur Darstellung von Syntaxdiagrammen



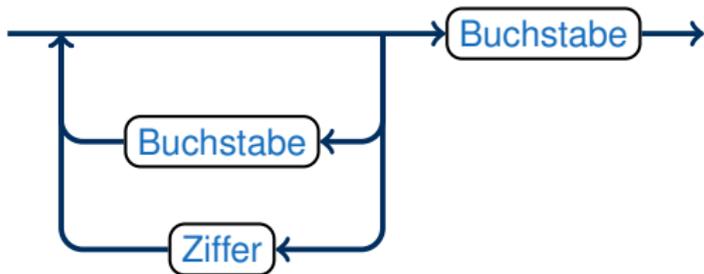
Übersetzung in NFA:

- zusammenhängende Linienbereiche werden Zustände
- Knoten werden Übergänge

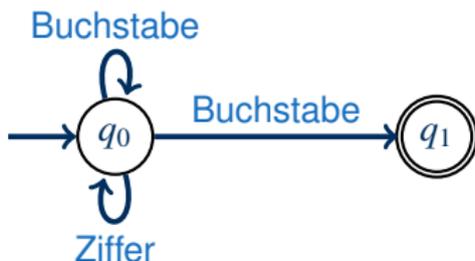


# Syntaxdiagramme und Nichtdeterminismus

Das folgende Beispiel führt zu einem NFA, der kein DFA ist:



Entsprechender NFA:



# Verallgemeinerte NFA-Übergangsfunktion

Wie beim DFA können wir auch bei einem NFA  $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F \rangle$  eine erweiterte Übergangsfunktion definieren, die ganze Wörter einliest

Zuerst erweitern wir  $\delta$  auf Mengen von Zuständen:

Für eine Zustandsmenge  $R \subseteq Q$  und ein Terminalsymbol  $a$  sei

$$\delta(R, a) = \bigcup_{q \in R} \delta(q, a).$$

# Verallgemeinerte NFA-Übergangsfunktion

Wie beim DFA können wir auch bei einem NFA  $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F \rangle$  eine erweiterte Übergangsfunktion definieren, die ganze Wörter einliest

Zuerst erweitern wir  $\delta$  auf Mengen von Zuständen:

Für eine Zustandsmenge  $R \subseteq Q$  und ein Terminalsymbol  $a$  sei

$$\delta(R, a) = \bigcup_{q \in R} \delta(q, a).$$

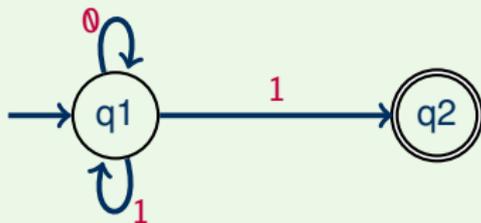
Dann erweitern wir  $\delta$  von einzelnen Symbolen zu beliebigen Wörtern:

Für eine Zustandsmenge  $R \subseteq Q$  und ein Wort  $w \in \Sigma^*$  sei  $\delta(R, w)$  die Menge aller Zustände, die man erreichen kann, wenn man in einem Zustand aus  $R$  beginnt und das Wort  $w$  einliest, formal:

- $\delta(R, \epsilon) = R$
- $\delta(R, av) = \delta(\delta(R, a), v)$

# Beispiel

Beispiel:



$$\delta(q_1, 0) = \{q_1\}$$

$$\delta(q_1, 1) = \{q_1, q_2\}$$

$$\delta(q_2, 0) = \emptyset$$

$$\delta(q_2, 1) = \emptyset$$

Die Menge der Startzustände ist  $Q_0 = \{q_1\}$ .

Dann gilt:

$$\delta(Q_0, 0) = \delta(q_1, 0) = \{q_1\}$$

$$\delta(Q_0, 1) = \delta(q_1, 1) = \{q_1, q_2\}$$

$$\begin{aligned}\delta(Q_0, 10) &= \delta(\delta(Q_0, 1), 0) = \delta(\{q_1, q_2\}, 0) \\ &= \delta(q_1, 0) \cup \delta(q_2, 0) = \{q_1\} \cup \emptyset = \{q_1\}\end{aligned}$$

$$\delta(Q_0, 01) = \delta(\delta(Q_0, 0), 1) = \delta(\{q_1\}, 1) = \{q_1, q_2\}$$

## Sprache eines NFA (2. Version)

Die erweiterte Übergangsfunktion hilft bei der Definition der Sprache, die ein NFA akzeptiert:

Die **Sprache eines NFA**  $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F \rangle$  ist die Menge

$$\mathbf{L}(\mathcal{M}) = \{w \in \Sigma^* \mid \delta(Q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$$

Die Bedingung „ $\delta(Q_0, w) \cap F \neq \emptyset$ “ bedeutet:

„mindestens einer der Zustände, die man durch Einlesen von  $w$  von einem Startzustand aus erreichen kann, ist ein Endzustand.“

**Behauptung:** Diese Variante stimmt mit der vorherigen (mit akzeptierenden Läufen) überein.

# Äquivalenz der Sprachdefinitionen für NFAs

Sei  $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F \rangle$  NFA und  $w = \sigma_1 \cdots \sigma_n \in \Sigma^*$  ein Wort.

**Behauptung:** Es gibt einen akzeptierenden Lauf für  $w$  genau dann wenn  $\delta(Q_0, w) \cap F \neq \emptyset$ .

# Äquivalenz der Sprachdefinitionen für NFAs

Sei  $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F \rangle$  NFA und  $w = \sigma_1 \cdots \sigma_n \in \Sigma^*$  ein Wort.

**Behauptung:** Es gibt einen akzeptierenden Lauf für  $w$  genau dann wenn  $\delta(Q_0, w) \cap F \neq \emptyset$ .

**Beweis** „ $\Rightarrow$ “: Angenommen es gibt einen akzeptierenden Lauf  $q_0 \dots q_n$  für  $w$ .

# Äquivalenz der Sprachdefinitionen für NFAs

Sei  $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F \rangle$  NFA und  $w = \sigma_1 \cdots \sigma_n \in \Sigma^*$  ein Wort.

**Behauptung:** Es gibt einen akzeptierenden Lauf für  $w$  genau dann wenn  $\delta(Q_0, w) \cap F \neq \emptyset$ .

**Beweis** „ $\Rightarrow$ “: Angenommen es gibt einen akzeptierenden Lauf  $q_0 \dots q_n$  für  $w$ .

- Dann ist  $q_n \in F$ .

# Äquivalenz der Sprachdefinitionen für NFAs

Sei  $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F \rangle$  NFA und  $w = \sigma_1 \cdots \sigma_n \in \Sigma^*$  ein Wort.

**Behauptung:** Es gibt einen akzeptierenden Lauf für  $w$  genau dann wenn  $\delta(Q_0, w) \cap F \neq \emptyset$ .

**Beweis „ $\Rightarrow$ “:** Angenommen es gibt einen akzeptierenden Lauf  $q_0 \dots q_n$  für  $w$ .

- Dann ist  $q_n \in F$ .
- Wir behaupten  $q_n \in \delta(Q_0, w)$  (damit folgt  $\delta(Q_0, w) \cap F \neq \emptyset$ )

# Äquivalenz der Sprachdefinitionen für NFAs

Sei  $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F \rangle$  NFA und  $w = \sigma_1 \cdots \sigma_n \in \Sigma^*$  ein Wort.

**Behauptung:** Es gibt einen akzeptierenden Lauf für  $w$  genau dann wenn  $\delta(Q_0, w) \cap F \neq \emptyset$ .

**Beweis** „ $\Rightarrow$ “: Angenommen es gibt einen akzeptierenden Lauf  $q_0 \dots q_n$  für  $w$ .

- Dann ist  $q_n \in F$ .
- Wir behaupten  $q_n \in \delta(Q_0, w)$  (damit folgt  $\delta(Q_0, w) \cap F \neq \emptyset$ )
- Wir zeigen die stärkere Behauptung  $q_i \in \delta(Q_0, \sigma_1 \cdots \sigma_i)$  für alle  $0 \leq i \leq n$  mittels Induktion über  $|w|$

# Äquivalenz der Sprachdefinitionen für NFAs

Sei  $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F \rangle$  NFA und  $w = \sigma_1 \cdots \sigma_n \in \Sigma^*$  ein Wort.

**Behauptung:** Es gibt einen akzeptierenden Lauf für  $w$  genau dann wenn  $\delta(Q_0, w) \cap F \neq \emptyset$ .

**Beweis** „ $\Rightarrow$ “: Angenommen es gibt einen akzeptierenden Lauf  $q_0 \dots q_n$  für  $w$ .

- Dann ist  $q_n \in F$ .
- Wir behaupten  $q_n \in \delta(Q_0, w)$  (damit folgt  $\delta(Q_0, w) \cap F \neq \emptyset$ )
- Wir zeigen die stärkere Behauptung  $q_i \in \delta(Q_0, \sigma_1 \cdots \sigma_i)$  für alle  $0 \leq i \leq n$  mittels Induktion über  $|w|$ :
  - Induktionsanfang: Für  $i = 0$  gilt  $q_0 \in Q_0 = \delta(Q_0, \epsilon)$

# Äquivalenz der Sprachdefinitionen für NFAs

Sei  $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F \rangle$  NFA und  $w = \sigma_1 \cdots \sigma_n \in \Sigma^*$  ein Wort.

**Behauptung:** Es gibt einen akzeptierenden Lauf für  $w$  genau dann wenn  $\delta(Q_0, w) \cap F \neq \emptyset$ .

**Beweis** „ $\Rightarrow$ “: Angenommen es gibt einen akzeptierenden Lauf  $q_0 \dots q_n$  für  $w$ .

- Dann ist  $q_n \in F$ .
- Wir behaupten  $q_n \in \delta(Q_0, w)$  (damit folgt  $\delta(Q_0, w) \cap F \neq \emptyset$ )
- Wir zeigen die stärkere Behauptung  $q_i \in \delta(Q_0, \sigma_1 \cdots \sigma_i)$  für alle  $0 \leq i \leq n$  mittels Induktion über  $|w|$ :
  - Induktionsanfang: Für  $i = 0$  gilt  $q_0 \in Q_0 = \delta(Q_0, \epsilon)$
  - Induktionshypothese: die Behauptung gelte für  $i$

# Äquivalenz der Sprachdefinitionen für NFAs

Sei  $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F \rangle$  NFA und  $w = \sigma_1 \cdots \sigma_n \in \Sigma^*$  ein Wort.

**Behauptung:** Es gibt einen akzeptierenden Lauf für  $w$  genau dann wenn  $\delta(Q_0, w) \cap F \neq \emptyset$ .

**Beweis** „ $\Rightarrow$ “: Angenommen es gibt einen akzeptierenden Lauf  $q_0 \dots q_n$  für  $w$ .

- Dann ist  $q_n \in F$ .
- Wir behaupten  $q_n \in \delta(Q_0, w)$  (damit folgt  $\delta(Q_0, w) \cap F \neq \emptyset$ )
- Wir zeigen die stärkere Behauptung  $q_i \in \delta(Q_0, \sigma_1 \cdots \sigma_i)$  für alle  $0 \leq i \leq n$  mittels Induktion über  $|w|$ :
  - Induktionsanfang: Für  $i = 0$  gilt  $q_0 \in Q_0 = \delta(Q_0, \epsilon)$
  - Induktionshypothese: die Behauptung gelte für  $i$
  - Induktionsschritt: für  $i + 1$  gilt:
    - $q_i \in \delta(Q_0, \sigma_1 \cdots \sigma_i)$  (Induktionshypothese)
    - $q_{i+1} \in \delta(q_i, \sigma_{i+1})$  (laut Definition eines Laufs)
    - $q_{i+1} \in \delta(\delta(Q_0, \sigma_1 \cdots \sigma_i), \sigma_{i+1}) = \delta(Q_0, \sigma_1 \cdots \sigma_i \sigma_{i+1})$

# Äquivalenz der Sprachdefinitionen für NFAs

Sei  $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F \rangle$  NFA und  $w = \sigma_1 \cdots \sigma_n \in \Sigma^*$  ein Wort.

**Behauptung:** Es gibt einen akzeptierenden Lauf für  $w$  genau dann wenn  $\delta(Q_0, w) \cap F \neq \emptyset$ .

**Beweis** „ $\Leftarrow$ “: Angenommen  $\delta(Q_0, w) \cap F \neq \emptyset$ .

# Äquivalenz der Sprachdefinitionen für NFAs

Sei  $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F \rangle$  NFA und  $w = \sigma_1 \cdots \sigma_n \in \Sigma^*$  ein Wort.

**Behauptung:** Es gibt einen akzeptierenden Lauf für  $w$  genau dann wenn  $\delta(Q_0, w) \cap F \neq \emptyset$ .

**Beweis** „ $\Leftarrow$ “: Angenommen  $\delta(Q_0, w) \cap F \neq \emptyset$ .

- Wir ermitteln einen akzeptierenden Lauf  $q_0 \dots q_n$  für  $w$

# Äquivalenz der Sprachdefinitionen für NFAs

Sei  $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F \rangle$  NFA und  $w = \sigma_1 \cdots \sigma_n \in \Sigma^*$  ein Wort.

**Behauptung:** Es gibt einen akzeptierenden Lauf für  $w$  genau dann wenn  $\delta(Q_0, w) \cap F \neq \emptyset$ .

**Beweis** „ $\Leftarrow$ “: Angenommen  $\delta(Q_0, w) \cap F \neq \emptyset$ .

- Wir ermitteln einen akzeptierenden Lauf  $q_0 \dots q_n$  für  $w$
- Dazu gehen wir rückwärts vor:
  - Wähle  $q_n \in F \cap \delta(Q_0, w)$
  - Für alle  $i = n, \dots, 1$ :  
Wähle  $q_{i-1} \in \delta(Q_0, \sigma_0 \cdots \sigma_{i-1})$ , so dass  $q_i \in \delta(q_{i-1}, \sigma_i)$

# Äquivalenz der Sprachdefinitionen für NFAs

Sei  $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F \rangle$  NFA und  $w = \sigma_1 \cdots \sigma_n \in \Sigma^*$  ein Wort.

**Behauptung:** Es gibt einen akzeptierenden Lauf für  $w$  genau dann wenn  $\delta(Q_0, w) \cap F \neq \emptyset$ .

**Beweis** „ $\Leftarrow$ “: Angenommen  $\delta(Q_0, w) \cap F \neq \emptyset$ .

- Wir ermitteln einen akzeptierenden Lauf  $q_0 \dots q_n$  für  $w$
- Dazu gehen wir rückwärts vor:
  - Wähle  $q_n \in F \cap \delta(Q_0, w)$
  - Für alle  $i = n, \dots, 1$ :  
Wähle  $q_{i-1} \in \delta(Q_0, \sigma_0 \cdots \sigma_{i-1})$ , so dass  $q_i \in \delta(q_{i-1}, \sigma_i)$
- Dies ist ein Lauf, da  $q_0 \in \delta(Q_0, \epsilon) = Q_0$  und alle Übergänge erlaubt sind.
- Es ist ein akzeptierender Lauf, da  $q_n \in F$ . □

# NFA vs. DFA

# Vergleich DFA – NFA

Offensichtlich sind NFAs allgemeiner als DFAs:

Satz: Jeder DFA kann als NFA aufgefasst werden. Daher wird jede von einem DFA akzeptierbare Sprache auch von einem NFA akzeptiert.

**Beweis:** Für jeden DFA  $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$  gibt es einen entsprechenden NFA  $\mathcal{M}' = \langle Q, \Sigma, \delta_{\text{NFA}}, \{q_0\}, F \rangle$  mit

$$\delta_{\text{NFA}}(q, \mathbf{a}) = \{\delta(q, \mathbf{a})\}.$$

□

# Vergleich DFA – NFA

Offensichtlich sind NFAs allgemeiner als DFAs:

Satz: Jeder DFA kann als NFA aufgefasst werden. Daher wird jede von einem DFA akzeptierbare Sprache auch von einem NFA akzeptiert.

**Beweis:** Für jeden DFA  $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$  gibt es einen entsprechenden NFA  $\mathcal{M}' = \langle Q, \Sigma, \delta_{\text{NFA}}, \{q_0\}, F \rangle$  mit  $\delta_{\text{NFA}}(q, a) = \{\delta(q, a)\}$ . □

Die Umkehrung dieses Satzes gilt allerdings auch:

Satz: Jede von einem NFA akzeptierbare Sprache wird auch von einem DFA akzeptiert.

In diesem Sinne sind NFA nicht ausdrucksstärker als DFA – wie kann das sein?

# NFAs als DFAs – Idee

Die verallgemeinerte NFA-Übergangsfunktion bildet **Mengen von Zuständen** auf **Mengen von Zuständen** ab:

$$\delta(R, \mathbf{a}) = \bigcup_{q \in R} \delta(q, \mathbf{a}).$$

„Wenn der Automat in einem der Zustände  $R$  ist und  $\mathbf{a}$  liest, so ist er anschließend in einem der Zustände der Menge  $\delta(R, \mathbf{a})$ .“

Dieser Übergang zwischen Mengen möglicher Zustände ist an sich deterministisch.

↪ wir können einen NFA deterministisch simulieren, indem wir die Menge der möglichen Zustände berechnen

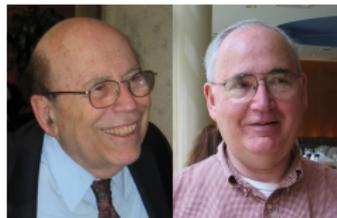
# Die Potenzmengenkonstruktion

Für einen NFA  $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F \rangle$  definieren wir den **Potenzmengen-DFA**  $\mathcal{M}_{\text{DFA}} = \langle Q_{\text{DFA}}, \Sigma, \delta_{\text{DFA}}, q_0, F_{\text{DFA}} \rangle$  wie folgt:

- $Q_{\text{DFA}} = 2^Q$  (Potenzmenge von  $Q$ )
- $\delta_{\text{DFA}}(R, \mathbf{a}) = \bigcup_{q \in R} \delta(q, \mathbf{a})$
- $q_0 = Q_0$
- $F_{\text{DFA}} = \{R \in 2^Q \mid R \cap F \neq \emptyset\}$

Satz (Rabin/Scott):  $\mathbf{L}(\mathcal{M}) = \mathbf{L}(\mathcal{M}_{\text{DFA}})$

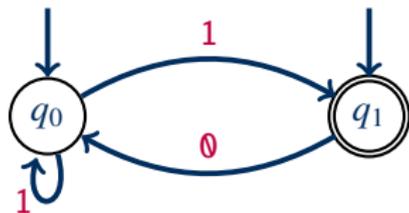
(Beweis später)



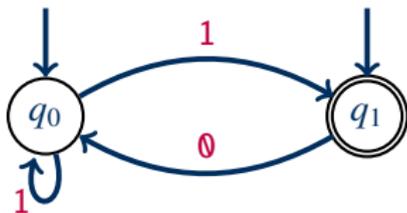
Michael Oser Rabin    Dana Scott

Andrej Bauer, CC-BY-SA 2.5

# Beispiel Potenzmengenkonstruktion



# Beispiel Potenzmengenkonstruktion



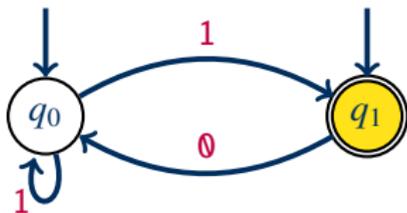
$\{q_0, q_1\}$

$\{q_0\}$

$\emptyset$

$\{q_1\}$

# Beispiel Potenzmengenkonstruktion



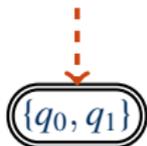
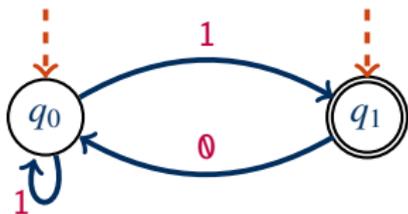
$\{q_0, q_1\}$

$\{q_0\}$

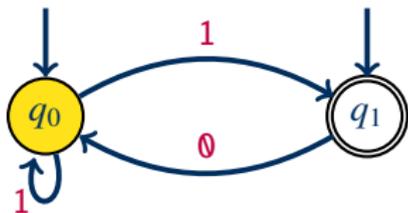
$\emptyset$

$\{q_1\}$

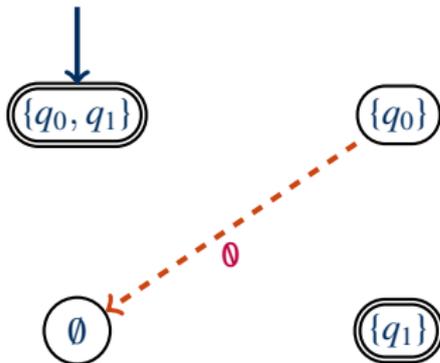
# Beispiel Potenzmengenkonstruktion



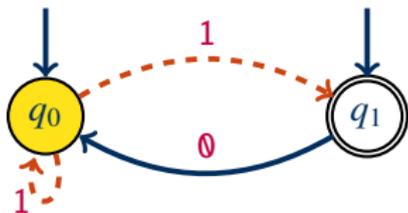
# Beispiel Potenzmengenkonstruktion



$$\delta_{\text{DFA}}(\{q_0\}, 0) = \emptyset$$

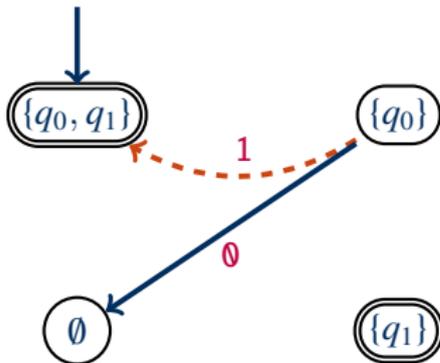


# Beispiel Potenzmengenkonstruktion

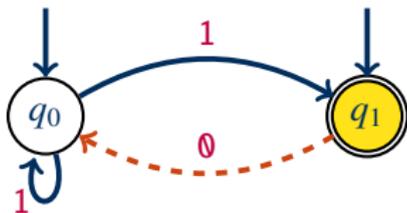


$$\delta_{\text{DFA}}(\{q_0\}, 0) = \emptyset$$

$$\delta_{\text{DFA}}(\{q_0\}, 1) = \{q_0, q_1\}$$



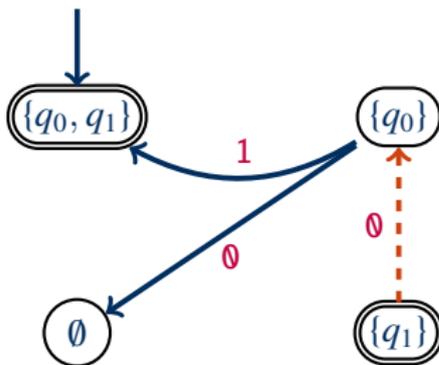
# Beispiel Potenzmengenkonstruktion



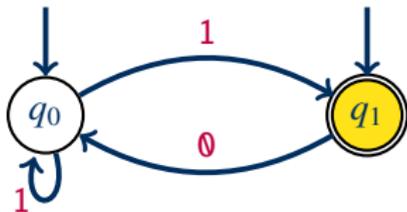
$$\delta_{\text{DFA}}(\{q_0\}, 0) = \emptyset$$

$$\delta_{\text{DFA}}(\{q_0\}, 1) = \{q_0, q_1\}$$

$$\delta_{\text{DFA}}(\{q_1\}, 0) = \{q_0\}$$



# Beispiel Potenzmengenkonstruktion

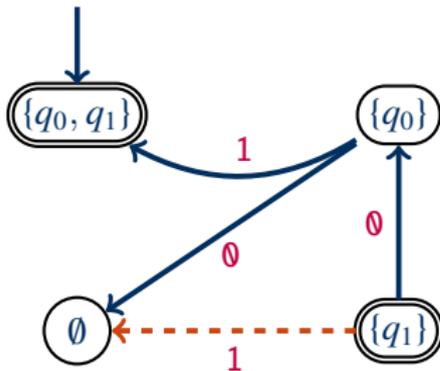


$$\delta_{\text{DFA}}(\{q_0\}, 0) = \emptyset$$

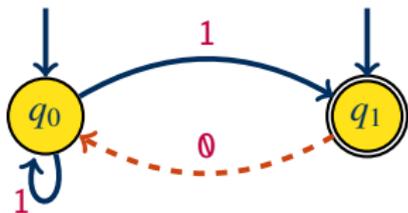
$$\delta_{\text{DFA}}(\{q_0\}, 1) = \{q_0, q_1\}$$

$$\delta_{\text{DFA}}(\{q_1\}, 0) = \{q_0\}$$

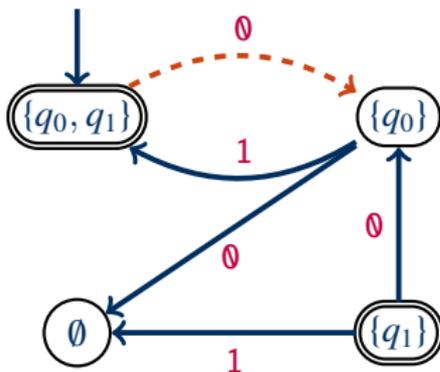
$$\delta_{\text{DFA}}(\{q_1\}, 1) = \emptyset$$



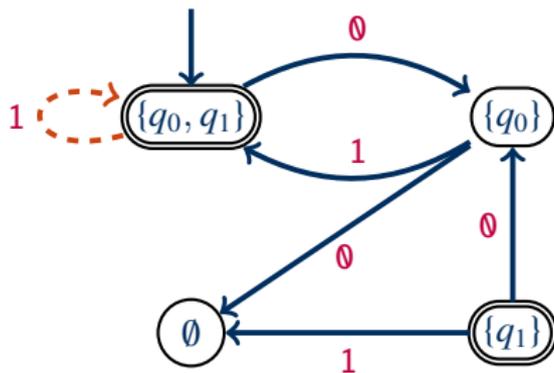
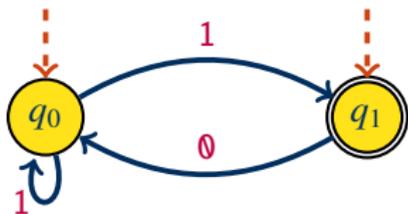
# Beispiel Potenzmengenkonstruktion



$$\begin{aligned}\delta_{\text{DFA}}(\{q_0\}, 0) &= \emptyset \\ \delta_{\text{DFA}}(\{q_0\}, 1) &= \{q_0, q_1\} \\ \delta_{\text{DFA}}(\{q_1\}, 0) &= \{q_0\} \\ \delta_{\text{DFA}}(\{q_1\}, 1) &= \emptyset \\ \delta_{\text{DFA}}(\{q_0, q_1\}, 0) &= \{q_0\}\end{aligned}$$



# Beispiel Potenzmengenkonstruktion



$$\delta_{\text{DFA}}(\{q_0\}, 0) = \emptyset$$

$$\delta_{\text{DFA}}(\{q_0\}, 1) = \{q_0, q_1\}$$

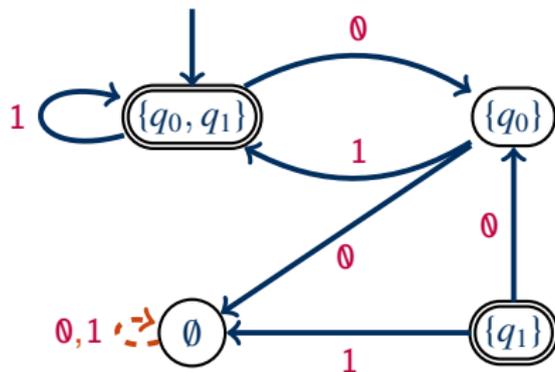
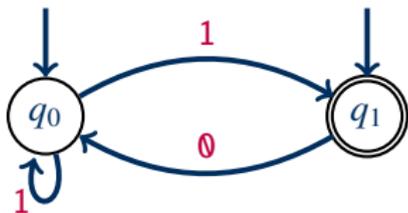
$$\delta_{\text{DFA}}(\{q_1\}, 0) = \{q_0\}$$

$$\delta_{\text{DFA}}(\{q_1\}, 1) = \emptyset$$

$$\delta_{\text{DFA}}(\{q_0, q_1\}, 0) = \{q_0\}$$

$$\delta_{\text{DFA}}(\{q_0, q_1\}, 1) = \{q_0, q_1\}$$

# Beispiel Potenzmengenkonstruktion



$$\delta_{\text{DFA}}(\{q_0\}, 0) = \emptyset$$

$$\delta_{\text{DFA}}(\{q_0\}, 1) = \{q_0, q_1\}$$

$$\delta_{\text{DFA}}(\{q_1\}, 0) = \{q_0\}$$

$$\delta_{\text{DFA}}(\{q_1\}, 1) = \emptyset$$

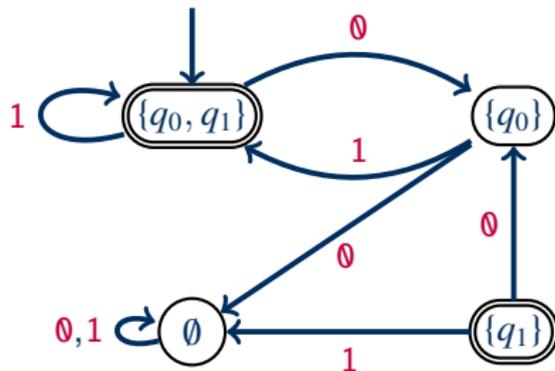
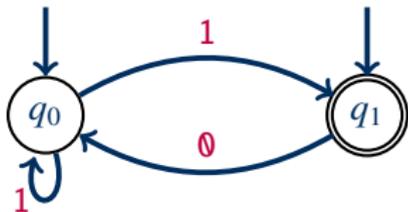
$$\delta_{\text{DFA}}(\{q_0, q_1\}, 0) = \{q_0\}$$

$$\delta_{\text{DFA}}(\{q_0, q_1\}, 1) = \{q_0, q_1\}$$

$$\delta_{\text{DFA}}(\emptyset, 0) = \emptyset$$

$$\delta_{\text{DFA}}(\emptyset, 1) = \emptyset$$

# Beispiel Potenzmengenkonstruktion



$$\delta_{\text{DFA}}(\{q_0\}, 0) = \emptyset$$

$$\delta_{\text{DFA}}(\{q_0\}, 1) = \{q_0, q_1\}$$

$$\delta_{\text{DFA}}(\{q_1\}, 0) = \{q_0\}$$

$$\delta_{\text{DFA}}(\{q_1\}, 1) = \emptyset$$

$$\delta_{\text{DFA}}(\{q_0, q_1\}, 0) = \{q_0\}$$

$$\delta_{\text{DFA}}(\{q_0, q_1\}, 1) = \{q_0, q_1\}$$

$$\delta_{\text{DFA}}(\emptyset, 0) = \emptyset$$

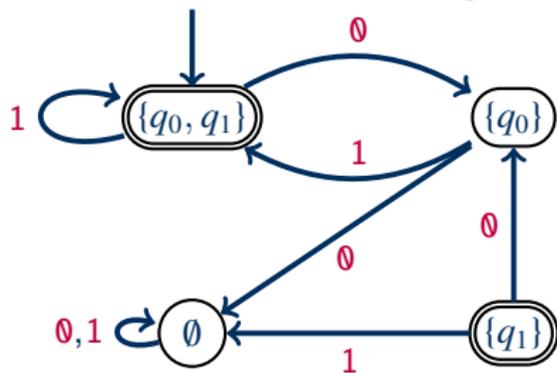
$$\delta_{\text{DFA}}(\emptyset, 1) = \emptyset$$

Erkannte Sprache:

$$\{1\}^* \circ (\{0\} \circ \{1\}^*)^*$$

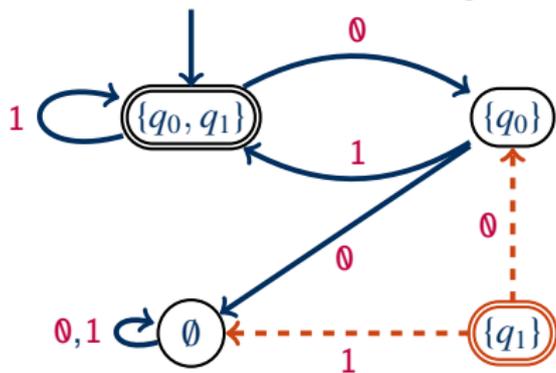
# Vereinfachung Potenzmengenkonstruktion

Der Automat aus dem vorherigen Beispiel kann vereinfacht werden:



# Vereinfachung Potenzmengenkonstruktion

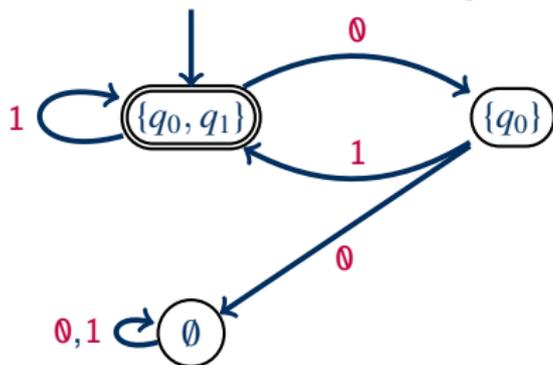
Der Automat aus dem vorherigen Beispiel kann vereinfacht werden:



- Zustand  $\{q_1\}$  ist unerreichbar

# Vereinfachung Potenzmengenkonstruktion

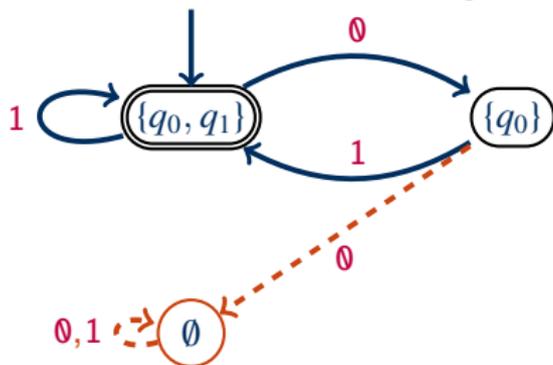
Der Automat aus dem vorherigen Beispiel kann vereinfacht werden:



- Zustand  $\{q_1\}$  ist unerreichbar

# Vereinfachung Potenzmengenkonstruktion

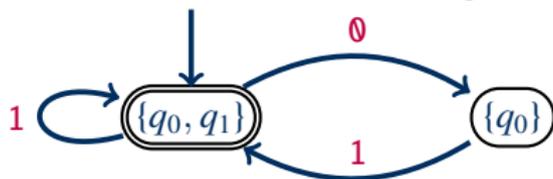
Der Automat aus dem vorherigen Beispiel kann vereinfacht werden:



- Zustand  $\{q_1\}$  ist unerreichbar
- Zustand  $\emptyset$  kann nicht verlassen werden (irrelevant für akzeptierende Läufe)

# Vereinfachung Potenzmengenkonstruktion

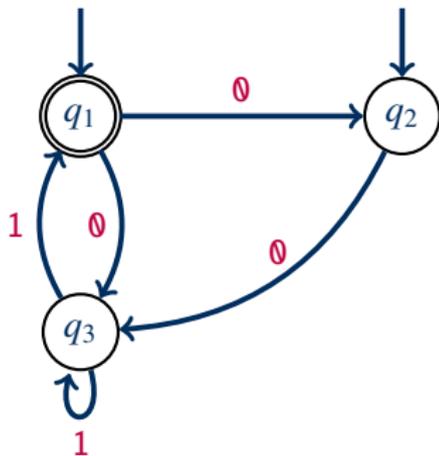
Der Automat aus dem vorherigen Beispiel kann vereinfacht werden:



- Zustand  $\{q_1\}$  ist unerreichbar
- Zustand  $\emptyset$  kann nicht verlassen werden (irrelevant für akzeptierende Läufe)

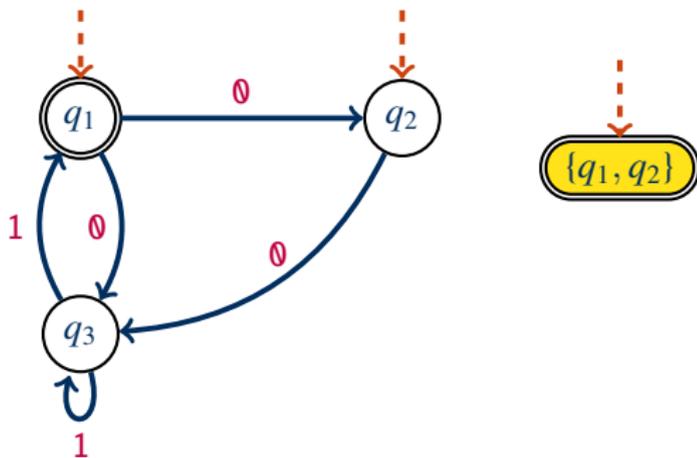
# Potenzmengenkonstruktion „on the fly“

Vermeidung unnötiger Zustände durch schrittweise Konstruktion vom Startzustand:



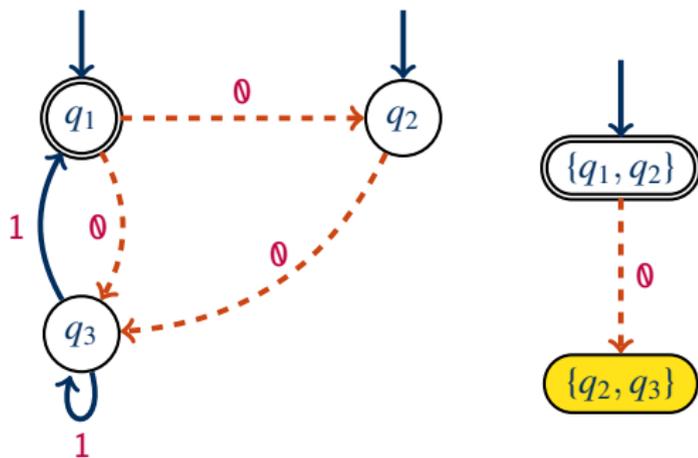
# Potenzmengenkonstruktion „on the fly“

Vermeidung unnötiger Zustände durch schrittweise Konstruktion vom Startzustand:



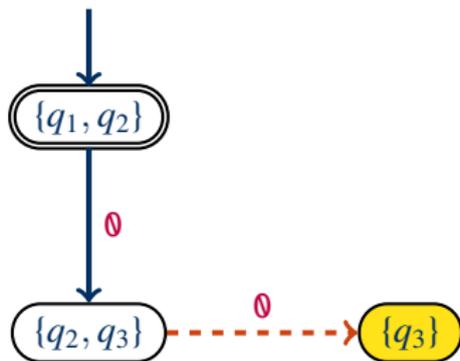
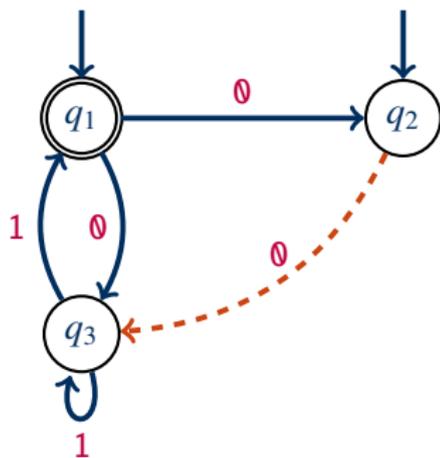
# Potenzmengenkonstruktion „on the fly“

Vermeidung unnötiger Zustände durch schrittweise Konstruktion vom Startzustand:



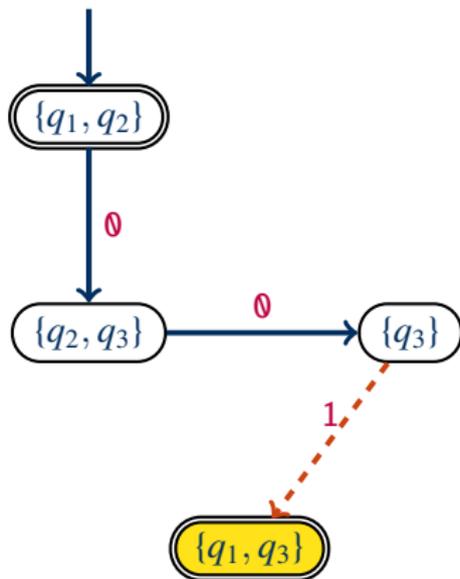
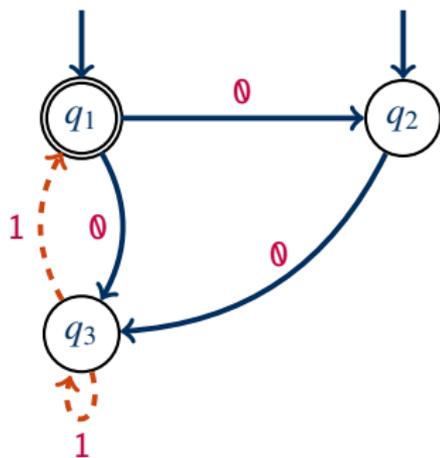
# Potenzmengenkonstruktion „on the fly“

Vermeidung unnötiger Zustände durch schrittweise Konstruktion vom Startzustand:



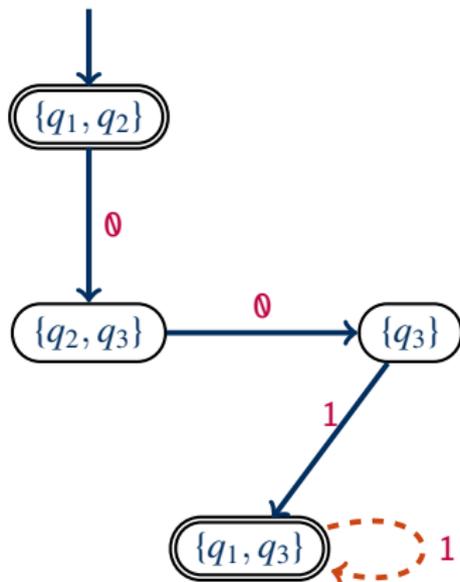
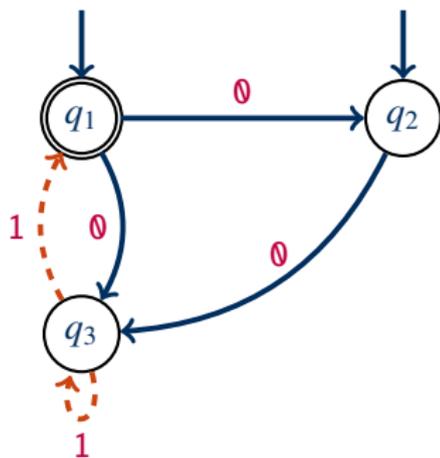
# Potenzmengenkonstruktion „on the fly“

Vermeidung unnötiger Zustände durch schrittweise Konstruktion vom Startzustand:



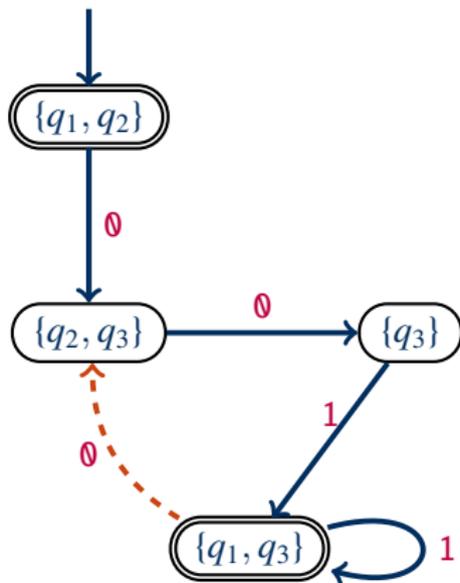
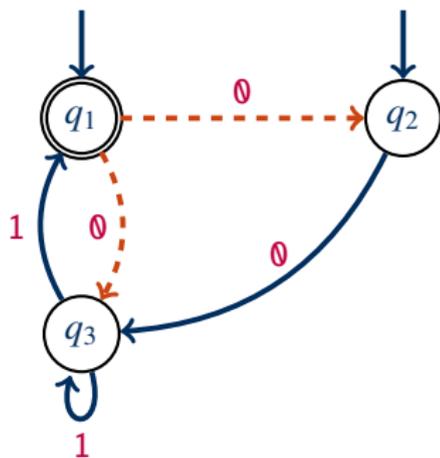
# Potenzmengenkonstruktion „on the fly“

Vermeidung unnötiger Zustände durch schrittweise Konstruktion vom Startzustand:



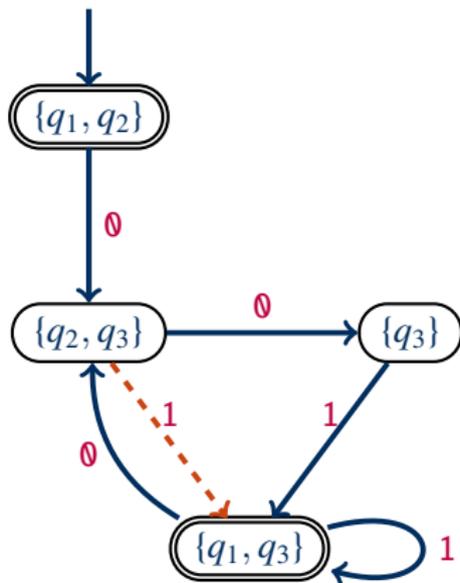
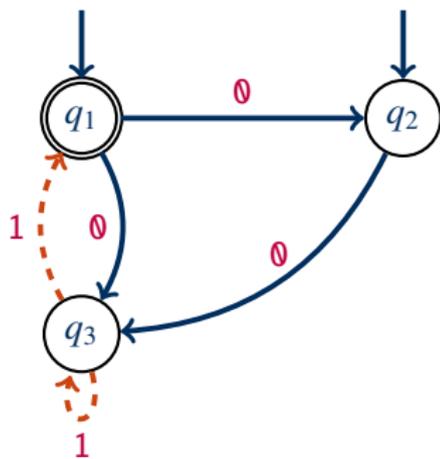
# Potenzmengenkonstruktion „on the fly“

Vermeidung unnötiger Zustände durch schrittweise Konstruktion vom Startzustand:



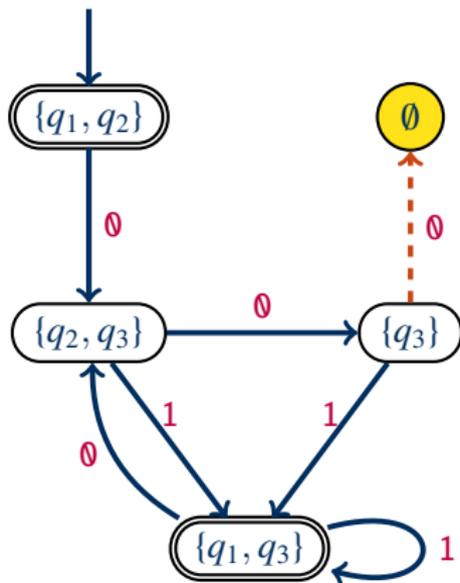
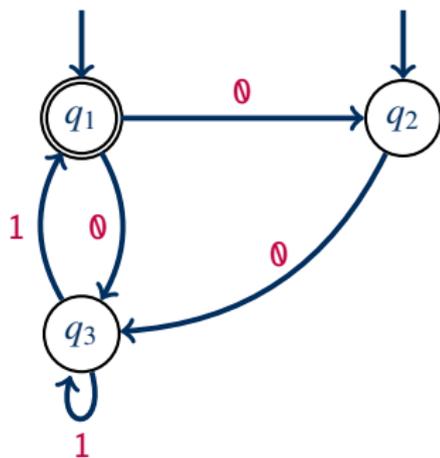
# Potenzmengenkonstruktion „on the fly“

Vermeidung unnötiger Zustände durch schrittweise Konstruktion vom Startzustand:



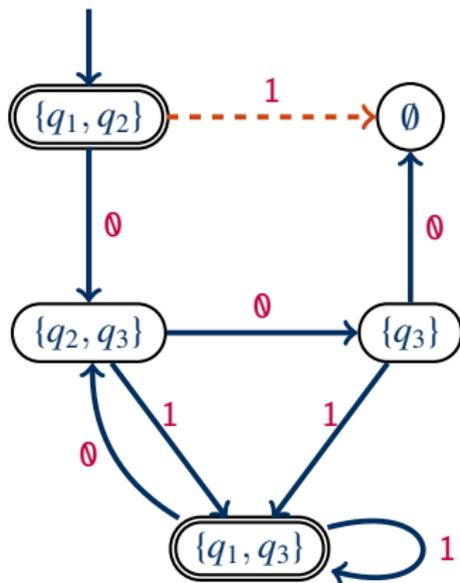
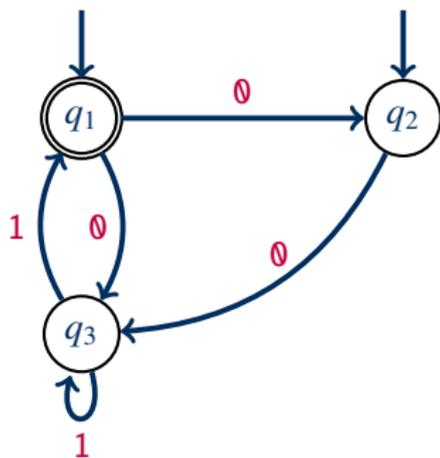
# Potenzmengenkonstruktion „on the fly“

Vermeidung unnötiger Zustände durch schrittweise Konstruktion vom Startzustand:



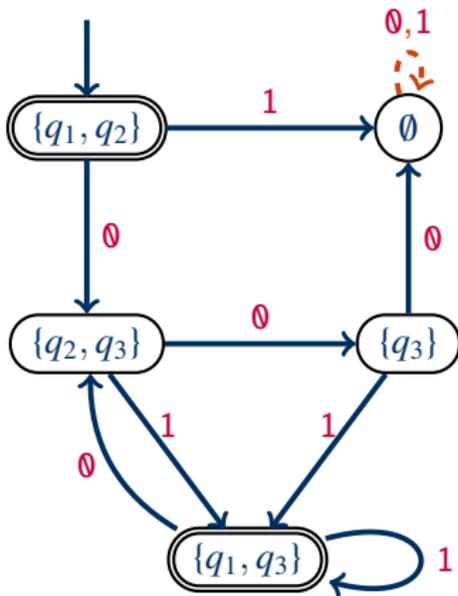
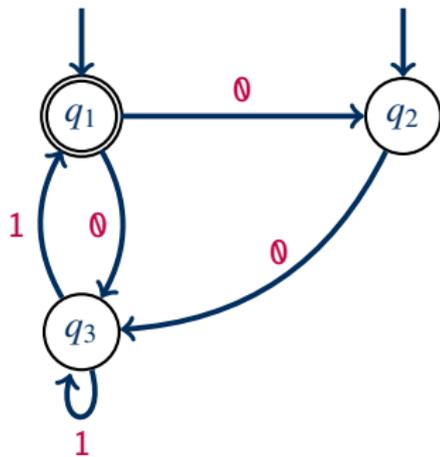
# Potenzmengenkonstruktion „on the fly“

Vermeidung unnötiger Zustände durch schrittweise Konstruktion vom Startzustand:



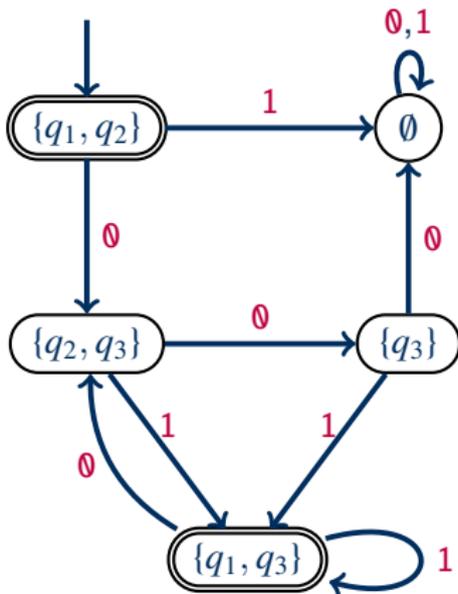
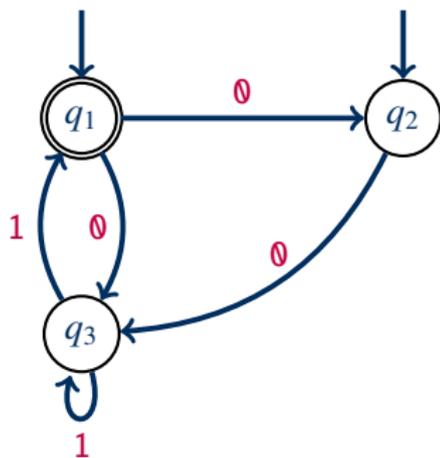
# Potenzmengenkonstruktion „on the fly“

Vermeidung unnötiger Zustände durch schrittweise Konstruktion vom Startzustand:



# Potenzmengenkonstruktion „on the fly“

Vermeidung unnötiger Zustände durch schrittweise Konstruktion vom Startzustand:



- Erreichbarer Teil spart drei Zustände ein
- Zustand  $\emptyset$  wie zuvor unnötig

# Potenzmengenkonstruktion: Korrektheit

Satz (Rabin/Scott):  $\mathbf{L}(\mathcal{M}) = \mathbf{L}(\mathcal{M}_{\text{DFA}})$

**Beweis:** Wir nutzen die Korrespondenz der verallgemeinerten Übergangsfunktionen aus. Zuerst zeigen wir, dass für jedes Wort  $w \in \Sigma^*$  und jede Zustandsmenge  $R$  gilt:  $\delta_{\text{DFA}}(R, w) = \delta(R, w)$ .

# Potenzmengenkonstruktion: Korrektheit

Satz (Rabin/Scott):  $\mathbf{L}(\mathcal{M}) = \mathbf{L}(\mathcal{M}_{\text{DFA}})$

**Beweis:** Wir nutzen die Korrespondenz der verallgemeinerten Übergangsfunktionen aus. Zuerst zeigen wir, dass für jedes Wort  $w \in \Sigma^*$  und jede Zustandsmenge  $R$  gilt:  $\delta_{\text{DFA}}(R, w) = \delta(R, w)$ .

Induktionsanfang:

$$(1) \delta_{\text{DFA}}(R, \epsilon) = R = \delta(R, \epsilon)$$

# Potenzmengenkonstruktion: Korrektheit

Satz (Rabin/Scott):  $\mathbf{L}(\mathcal{M}) = \mathbf{L}(\mathcal{M}_{\text{DFA}})$

**Beweis:** Wir nutzen die Korrespondenz der verallgemeinerten Übergangsfunktionen aus. Zuerst zeigen wir, dass für jedes Wort  $w \in \Sigma^*$  und jede Zustandsmenge  $R$  gilt:  $\delta_{\text{DFA}}(R, w) = \delta(R, w)$ .

Induktionsanfang:

$$(1) \quad \delta_{\text{DFA}}(R, \epsilon) = R = \delta(R, \epsilon)$$

$$(2) \quad \delta_{\text{DFA}}(R, \mathbf{a}) = \bigcup_{q \in R} \delta(q, \mathbf{a}) = \delta(R, \mathbf{a})$$

# Potenzmengenkonstruktion: Korrektheit

Satz (Rabin/Scott):  $\mathbf{L}(\mathcal{M}) = \mathbf{L}(\mathcal{M}_{\text{DFA}})$

**Beweis:** Wir nutzen die Korrespondenz der verallgemeinerten Übergangsfunktionen aus. Zuerst zeigen wir, dass für jedes Wort  $w \in \Sigma^*$  und jede Zustandsmenge  $R$  gilt:  $\delta_{\text{DFA}}(R, w) = \delta(R, w)$ .

Induktionsanfang:

$$(1) \quad \delta_{\text{DFA}}(R, \epsilon) = R = \delta(R, \epsilon)$$

$$(2) \quad \delta_{\text{DFA}}(R, \mathbf{a}) = \bigcup_{q \in R} \delta(q, \mathbf{a}) = \delta(R, \mathbf{a})$$

Induktionshypothese:  $\delta_{\text{DFA}}(R, v) = \delta(R, v)$  für Wörter  $v$  mit  $|v| < |w|$

Induktionsschritt:

$$(3) \quad \delta_{\text{DFA}}(R, \mathbf{a}v) = \delta_{\text{DFA}}(\delta_{\text{DFA}}(R, \mathbf{a}), v)$$

# Potenzmengenkonstruktion: Korrektheit

Satz (Rabin/Scott):  $\mathbf{L}(\mathcal{M}) = \mathbf{L}(\mathcal{M}_{\text{DFA}})$

**Beweis:** Wir nutzen die Korrespondenz der verallgemeinerten Übergangsfunktionen aus. Zuerst zeigen wir, dass für jedes Wort  $w \in \Sigma^*$  und jede Zustandsmenge  $R$  gilt:  $\delta_{\text{DFA}}(R, w) = \delta(R, w)$ .

Induktionsanfang:

$$(1) \quad \delta_{\text{DFA}}(R, \epsilon) = R = \delta(R, \epsilon)$$

$$(2) \quad \delta_{\text{DFA}}(R, \mathbf{a}) = \bigcup_{q \in R} \delta(q, \mathbf{a}) = \delta(R, \mathbf{a})$$

Induktionshypothese:  $\delta_{\text{DFA}}(R, v) = \delta(R, v)$  für Wörter  $v$  mit  $|v| < |w|$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} (3) \quad \delta_{\text{DFA}}(R, \mathbf{a}v) &= \delta_{\text{DFA}}(\delta_{\text{DFA}}(R, \mathbf{a}), v) \\ &= \delta_{\text{DFA}}(\delta(R, \mathbf{a}), v) \quad (\text{wegen (2)}) \end{aligned}$$

# Potenzmengenkonstruktion: Korrektheit

Satz (Rabin/Scott):  $\mathbf{L}(\mathcal{M}) = \mathbf{L}(\mathcal{M}_{\text{DFA}})$

**Beweis:** Wir nutzen die Korrespondenz der verallgemeinerten Übergangsfunktionen aus. Zuerst zeigen wir, dass für jedes Wort  $w \in \Sigma^*$  und jede Zustandsmenge  $R$  gilt:  $\delta_{\text{DFA}}(R, w) = \delta(R, w)$ .

Induktionsanfang:

$$(1) \quad \delta_{\text{DFA}}(R, \epsilon) = R = \delta(R, \epsilon)$$

$$(2) \quad \delta_{\text{DFA}}(R, \mathbf{a}) = \bigcup_{q \in R} \delta(q, \mathbf{a}) = \delta(R, \mathbf{a})$$

Induktionshypothese:  $\delta_{\text{DFA}}(R, v) = \delta(R, v)$  für Wörter  $v$  mit  $|v| < |w|$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} (3) \quad \delta_{\text{DFA}}(R, \mathbf{a}v) &= \delta_{\text{DFA}}(\delta_{\text{DFA}}(R, \mathbf{a}), v) \\ &= \delta_{\text{DFA}}(\delta(R, \mathbf{a}), v) && \text{(wegen (2))} \\ &= \delta(\delta(R, \mathbf{a}), v) && \text{(Induktionshypothese)} \end{aligned}$$

# Potenzmengenkonstruktion: Korrektheit

Satz (Rabin/Scott):  $\mathbf{L}(\mathcal{M}) = \mathbf{L}(\mathcal{M}_{\text{DFA}})$

**Beweis:** Wir nutzen die Korrespondenz der verallgemeinerten Übergangsfunktionen aus. Zuerst zeigen wir, dass für jedes Wort  $w \in \Sigma^*$  und jede Zustandsmenge  $R$  gilt:  $\delta_{\text{DFA}}(R, w) = \delta(R, w)$ .

Induktionsanfang:

$$(1) \quad \delta_{\text{DFA}}(R, \epsilon) = R = \delta(R, \epsilon)$$

$$(2) \quad \delta_{\text{DFA}}(R, \mathbf{a}) = \bigcup_{q \in R} \delta(q, \mathbf{a}) = \delta(R, \mathbf{a})$$

Induktionshypothese:  $\delta_{\text{DFA}}(R, v) = \delta(R, v)$  für Wörter  $v$  mit  $|v| < |w|$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} (3) \quad \delta_{\text{DFA}}(R, \mathbf{a}v) &= \delta_{\text{DFA}}(\delta_{\text{DFA}}(R, \mathbf{a}), v) \\ &= \delta_{\text{DFA}}(\delta(R, \mathbf{a}), v) && \text{(wegen (2))} \\ &= \delta(\delta(R, \mathbf{a}), v) && \text{(Induktionshypothese)} \\ &= \delta(R, \mathbf{a}v) \end{aligned}$$

## Potenzmengenkonstruktion: Korrektheit (2)

Satz (Rabin/Scott):  $\mathbf{L}(\mathcal{M}) = \mathbf{L}(\mathcal{M}_{\text{DFA}})$

**Beweis (Fortsetzung):** Wir haben gezeigt:  $\delta_{\text{DFA}}(R, w) = \delta(R, w)$ .

## Potenzmengenkonstruktion: Korrektheit (2)

Satz (Rabin/Scott):  $\mathbf{L}(\mathcal{M}) = \mathbf{L}(\mathcal{M}_{\text{DFA}})$

**Beweis (Fortsetzung):** Wir haben gezeigt:  $\delta_{\text{DFA}}(R, w) = \delta(R, w)$ .

Damit ergibt sich, für beliebige Wörter  $w \in \Sigma^*$ :

$w \in \mathbf{L}(\mathcal{M})$  gdw.

## Potenzmengenkonstruktion: Korrektheit (2)

Satz (Rabin/Scott):  $\mathbf{L}(\mathcal{M}) = \mathbf{L}(\mathcal{M}_{\text{DFA}})$

**Beweis (Fortsetzung):** Wir haben gezeigt:  $\delta_{\text{DFA}}(R, w) = \delta(R, w)$ .

Damit ergibt sich, für beliebige Wörter  $w \in \Sigma^*$ :

$$w \in \mathbf{L}(\mathcal{M}) \quad \text{gdw.} \quad \delta(Q_0, w) \cap F \neq \emptyset$$

## Potenzmengenkonstruktion: Korrektheit (2)

Satz (Rabin/Scott):  $\mathbf{L}(\mathcal{M}) = \mathbf{L}(\mathcal{M}_{\text{DFA}})$

**Beweis (Fortsetzung):** Wir haben gezeigt:  $\delta_{\text{DFA}}(R, w) = \delta(R, w)$ .

Damit ergibt sich, für beliebige Wörter  $w \in \Sigma^*$ :

$$\begin{aligned} w \in \mathbf{L}(\mathcal{M}) & \quad \text{gdw.} \quad \delta(Q_0, w) \cap F \neq \emptyset \\ & \quad \text{gdw.} \quad \delta_{\text{DFA}}(Q_0, w) \cap F \neq \emptyset \end{aligned}$$

## Potenzmengenkonstruktion: Korrektheit (2)

Satz (Rabin/Scott):  $\mathbf{L}(\mathcal{M}) = \mathbf{L}(\mathcal{M}_{\text{DFA}})$

**Beweis (Fortsetzung):** Wir haben gezeigt:  $\delta_{\text{DFA}}(R, w) = \delta(R, w)$ .

Damit ergibt sich, für beliebige Wörter  $w \in \Sigma^*$ :

$$\begin{aligned}w \in \mathbf{L}(\mathcal{M}) & \text{ gdw. } \delta(Q_0, w) \cap F \neq \emptyset \\ & \text{ gdw. } \delta_{\text{DFA}}(Q_0, w) \cap F \neq \emptyset \\ & \text{ gdw. } \delta_{\text{DFA}}(Q_0, w) \in F_{\text{DFA}}\end{aligned}$$

## Potenzmengenkonstruktion: Korrektheit (2)

Satz (Rabin/Scott):  $\mathbf{L}(\mathcal{M}) = \mathbf{L}(\mathcal{M}_{\text{DFA}})$

**Beweis (Fortsetzung):** Wir haben gezeigt:  $\delta_{\text{DFA}}(R, w) = \delta(R, w)$ .

Damit ergibt sich, für beliebige Wörter  $w \in \Sigma^*$ :

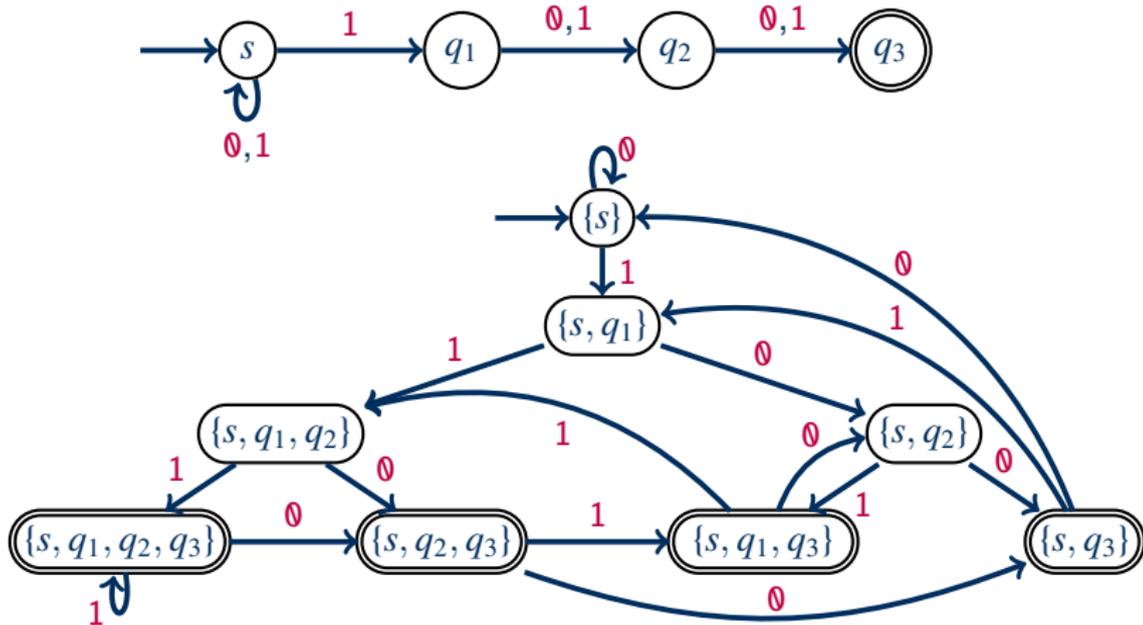
- $w \in \mathbf{L}(\mathcal{M})$     gdw.     $\delta(Q_0, w) \cap F \neq \emptyset$
- gdw.     $\delta_{\text{DFA}}(Q_0, w) \cap F \neq \emptyset$
- gdw.     $\delta_{\text{DFA}}(Q_0, w) \in F_{\text{DFA}}$
- gdw.     $w \in \mathbf{L}(\mathcal{M}_{\text{DFA}})$

□

# Größenvergleich

Der DFA eines NFA hat  $2^{|Q|}$  – also exponentiell viele – Zustände.  
Auch „on the fly“ lässt sich das im Allgemeinen nicht vermeiden.

Beispiel: „Wörter mit 1 an drittletzter Stelle“



## Größenvergleich (2)

Allgemein kann man für jede Zahl  $n \geq 1$  die Sprache  $L_n = \{0, 1\}^* 1 \{0, 1\}^{n-1}$  betrachten („Wörter mit 1 an  $n$ -letzter Stelle“)

Es gilt:

- Es gibt einen NFA mit  $n + 1$  Zuständen, der  $L_n$  erkennt.
- Jeder DFA, der  $L_n$  erkennt, hat mindestens  $2^n$  Zustände.

### Schlussfolgerung:

NFAs können exponentiell kompakter sein als äquivalente DFAs.

# Zusammenfassung und Ausblick

**Nichtdeterministische endliche Automaten (NFA)** vereinfachen die Modellierung, z.B. die direkte Darstellung von Syntaxdiagrammen

**Rabin/Scott:** DFAs und NFAs erkennen die selben Sprachen  
(Potenzmengenkonstruktion)

## Offene Fragen:

- Wir wollten noch zeigen: alle regulären Sprachen sind durch DFAs erkennbar – wie?
- Gibt es noch mehr Darstellungsformen für reguläre Sprachen?
- Wir haben gesehen, dass man Automaten manchmal vereinfachen kann – geht das noch besser?