TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Informatik, Institut für Künstliche Intelligenz, Professur Computational Logic

Dr. habil. Hannes Straß Dr. Dörthe Arndt

Übungen zur Lehrveranstaltung

Formale Systeme

Wintersemester 2021/22

8. Übungsblatt

Woche vom 6. bis 10. Dezember 2021

Aufgabe zur Selbstkontrolle (diese werden in den Übungen nicht besprochen)

S15) Betrachten Sie die Grammatik $G = (\{S, U, X, T, V, W, Y, D, E, A, B, C\}, \Sigma, P, S)$ mit $\Sigma = \{a, b, c\}$ und

$$\begin{aligned} P \;=\; \{ & S \longrightarrow UT, S \longrightarrow VW, U \longrightarrow XB, U \longrightarrow AB, \\ & X \longrightarrow AU, T \longrightarrow TC, T \longrightarrow c, V \longrightarrow AV, \\ & V \longrightarrow a, W \longrightarrow BY, W \longrightarrow BC, Y \longrightarrow WC, \\ & D \longrightarrow BC, D \longrightarrow BB, D \longrightarrow b, E \longrightarrow AB, \\ & E \longrightarrow AA, A \longrightarrow a, B \longrightarrow b, C \longrightarrow c\} \;. \end{aligned}$$

Verwenden Sie den CYK-Algorithmus (mit der Matrix-Notation aus der Vorlesung), um für die Wörter $w_1 = aabcc$ und $w_2 = aabbcc$ zu entscheiden, ob $w_i \in L(G)$ ist.

S16) Gegeben sind das Wort $w = aaaab$ und die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B, C\}, \Sigma = \{a, b\}$ und

$$\begin{aligned} P \;=\; \{ & S \longrightarrow AB, S \longrightarrow BC, S \longrightarrow bab, \\ & A \longrightarrow BA, A \longrightarrow a, \\ & B \longrightarrow ABC, B \longrightarrow b, \\ & C \longrightarrow AB, C \longrightarrow a, C \longrightarrow \varepsilon\} \;. \end{aligned}$$

a) Transformieren Sie die Grammatik G in eine ε-freie Grammatik G'.

b) Transformieren Sie die Grammatik G' in ihre *Chomsky*-Normalform.

c) Entscheiden Sie mithilfe des Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus, ob $w \in L(G)$ gilt.

Aufgabe 1

(a) Geben Sie einen Kellerautomaten $\mathcal{M}_0$ für die Sprache

$$L_0 = L(\mathcal{M}_0) = \{a^i b^j c^k \mid i = j \text{ oder } j = k \text{ mit } i, j, k \geq 1\}$$

sowie eine akzeptierende Folge der Konfigurationsübergänge in $\mathcal{M}_0$ für das Wort $w = aaabbcc$ an.

(b) Geben Sie einen Kellerautomaten $\mathcal{M}_1$ für die Sprache L_1 mit

$$L_1 = L(\mathcal{M}_1) = \{a^n b^m \mid n, m \geq 0\,, n = 3m\}$$

sowie eine akzeptierende Folge der Konfigurationsübergänge in $\mathcal{M}_1$ für das Wort $w = aaab$ an.

(c) Entwerfen Sie einen Kellerautomaten $\mathcal{M}_2$ für die Sprache L_2 mit

$$L_2 = L(\mathcal{M}_2) = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}\ .$$

und geben Sie eine akzeptierende Folge der Konfigurationsübergänge in $\mathcal{M}_2$ für das Wort $w = aabbba$ an. Zur Erinnerung: $|w|_a$ bezeichnet hierbei die Anzahl an a's in w.

(d) Geben Sie einen Kellerautomaten $\mathcal{M}_3$ für die Sprache

$$L_3 = L(\mathcal{M}_3) = \{(ab)^n (ba)^n \mid n \geq 0\}$$

über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ sowie eine akzeptierende Folge der Konfigurationsübergänge in $\mathcal{M}_3$ für das Wort $w = ababbaba$ an.

Hinweis: Nutzen Sie ggf. die zugehörigen Grammatiken in CNF von Blatt 7 Aufgabe 3.

Aufgabe 2

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage:

Ist $L \subseteq \Sigma^*$ eine kontextfreie Sprache, so ist auch $\pi(L)$ kontextfrei, wobei

$$\pi(L) \;=\; \{a_1 \dots a_n \in \Sigma^* : \text{ Es existiert eine Permutation } (i_1 \dots i_n) \text{ von } (1 \dots n), \text{ so dass } a_{i_1} \dots a_{i_n} \in L\}$$

Aufgabe 3

Gegeben sei die Sprache $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a + |w|_b = |w|_c\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$, wobei $|w|_a$ der Anzahl der Vorkommen von a in w entspricht.

a) Entwerfen Sie einen Kellerautomaten $\mathcal{M}$ mit $L(\mathcal{M}) = L$, der mittels Finalzustand akzeptiert.

b) Welcher andere Akzeptanzbegriff für Kellerautomaten ist laut Anmerkung in der Vorlesung auch möglich?

c) Wann ist eine Sprache deterministisch kontextfrei? Ist L deterministisch kontextfrei?

Aufgabe 4

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche nicht? Begründen Sie Ihre Antworten – dabei dürfen Sie den gesamten Stoff und alle Resultate der Vorlesung und Übung verwenden.

a) Es gibt eine Sprache, die von einem nichtdeterministischen Kellerautomaten erkannt wird, nicht aber von einem deterministischen Kellerautomaten.

b) Mithilfe des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen kann bewiesen werden, dass eine Sprache L kontextfrei ist.

c) Für eine beliebige Sprache L gilt: L ist regulär, wenn es eine natürliche Zahl $n_0 \geq 1$ gibt, so dass sich jedes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n_0$ zerlegen lässt in $w = xyz$ mit $y \neq \varepsilon, xy^k z \in L$ für alle $k \geq 0$.