TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

FORMALE SYSTEME

24. Vorlesung: Horn-Logik und Komplexitätstheorie

Markus Krötzsch
Professur für Wissensbasierte Systeme

TU Dresden, 18. Januar 2018

Logisches Schließen

Allgemeine Fragestellungen des logischen Schließens

- Logische Folgerung: Gilt $\mathcal{F} \models G$?
- Allgemeingültigkeit: Gilt $\models F$?
- Unerfüllbarkeit: Gilt $\models \neg F$, d.h. $F \models \bot$?

Einige einfache Methoden des logischen Schließens

- Wahrheitswertetabelle
- Erfüllbarkeitstest mit DNF
- Widerlegbarkeitstest mit KNF
- Erfüllbarkeitstest mit Resolution

$\leadsto$ Alle schlimmstenfalls exponentiell und oft zu ineffizient

Horn-Logik

Rückblick: Horn-Logik

Eine Horn-Klausel* ist eine Klausel, die höchstens ein nicht-negiertes Literal enthält.
Eine Horn-Formel ist eine Formel in KNF, welche nur Horn-Klauseln enthält.

*) nach Alfred Horn, 1918–2001, US-amerikanischer Mathematiker

Man kann Horn-Formeln als Implikationen auffassen
(sogenannte Horn-Regeln):

Beispiele:

$$\begin{aligned} \neg p \vee \neg q \vee r &\equiv (p \wedge q) \rightarrow r \\ p &\equiv \top \rightarrow p \\ \neg p \vee \neg q &\equiv (p \wedge q) \rightarrow \bot \end{aligned}$$

- Wir verwenden $\top$ für die leere Prämisse und $\bot$ für die leere Konsequenz (weil so die gewünschte logische Äquivalenz gilt)
- Es ist üblich, die Klammern der Konjunktion in der Prämisse wegzulassen

Beispiel

Viele einfache rekursive Algorithmen können in Horn-Aussagenlogik beschrieben werden.

Beispiel: Berechnung der Variablen V_ϵ einer CFG, welche in ϵ umgeschrieben werden können (vgl. Vorlesung 2, Folie 32). Wir betrachten die folgende Menge $\mathcal{F}$ von Horn-Regeln:

$$\top \to p_{\mathsf{A}} \qquad \text{für jede Grammatikregel } \mathsf{A} \to \epsilon$$
$$p_{\mathsf{A}_1} \wedge \ldots \wedge p_{\mathsf{A}_n} \to p_{\mathsf{B}} \qquad \text{für jede Grammatikregel } \mathsf{B} \to \mathsf{A}_1 \cdots \mathsf{A}_n$$

Dann gilt $\mathcal{F} \models p_{\mathsf{A}}$ genau dann wenn $\mathsf{A} \in V_\epsilon$.

Resolution bei Horn-Klauseln

Die Resolution von Horn-Klauseln = Verknüpfung von Regeln:

$$\frac{p_1 \wedge \ldots \wedge p_n \to q \qquad q \wedge q_1 \wedge \ldots \wedge q_m \to r}{p_1 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge q_1 \wedge \ldots \wedge q_m \to r}$$

Man kann zeigen (ohne Beweis):

Satz: Das Resolutionskalkül für Horn-Formeln bleibt auch dann vollständig, wenn man sich auf Resolventen beschränkt, bei denen eine Klausel die Form $\{p\}$ (also $\top \to p$) hat.

Diese Einschränkung entspricht der Entfernung von bereits erfüllten Vorbedingungen aus der Prämisse einer Regel:

$$\frac{\top \to q \qquad q \wedge q_1 \wedge \ldots \wedge q_m \to r}{q_1 \wedge \ldots \wedge q_m \to r}$$

Hyperresolution = Anwendung von Regeln

Es ist leicht zu sehen: Im eingeschränkten Resolutionskalkül für Horn-Formeln kann eine Resolvente aus einer Regel $q_1 \wedge \ldots \wedge q_m \to r$ nur dann zur Ableitung von $\bot$ nützlich sein, wenn letztlich alle Vorbedingungen $q_1, \ldots, q_m$ erfüllt sind.
$\rightsquigarrow$ Wir können die Resolution aufschieben, bis dies gegeben ist

Hyperresolution: Mehrere Klauseln mit positiven Literalen werden parallel mit einer Klausel mit vielen negativen Literalen resolviert.

$$\frac{\top \to q_1 \qquad \ldots \qquad \top \to q_m \qquad q_1 \wedge \ldots \wedge q_m \to r}{\top \to r}$$

Dies entspricht der intuitiven Idee einer Regelanwendung: „Wenn die Regel $q_1 \wedge \ldots \wedge q_m \to r$ und die Atome $q_1, \ldots, q_m$ gelten, dann kann r abgeleitet werden."

Komplexität des Schließens mit Horn-Formeln

Vorteil der Hyperresolution bei Horn-Klauseln:

- Jede Resolvente hat die Form $\top \to p$
- Es gibt nur linear viele solche Resolventen (für Atome p, die in der Formel vorkommen)

$\rightsquigarrow$ Resolution muss nach linear vielen Schritten terminieren

Dies führt zu einer polynomiellen Laufzeit, nicht zu einer linearen (da jeder Resolutionsschritt einige Zeit benötigt).

Es geht aber auch noch besser:

Satz (Dowling & Gallier): Die Erfüllbarkeit einer Horn-Formel kann in linearer Zeit entschieden werden.

(Ohne Beweis)

Logisches Schließen als Wortproblem

Schließen als Entscheidungsproblem

Wir wissen bereits, dass Schließen ein Entscheidungsproblem ist, z.B.:

Erfüllbarkeit:

- **Eingabe:** Formel F
- **Ausgabe:** „ja“ wenn F erfüllbar ist; sonst „nein.“

Wie wir wissen, können solche Probleme als Definition einer Sprache angesehen werden:

$$\textbf{SAT} = \{\text{enc}(F) \mid F \text{ ist erfüllbar}\}$$

wobei $\text{enc}(F)$ eine (vernünftige) Kodierung der Formel F als Wort über einem endlichen Alphabet (z.B. $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$) ist. Vor allem müssen wir beliebig viele Atome mit nur endlich vielen Zeichen kodieren.

Was für eine Sprache ist **SAT**?
Durch welches Automatenmodell wird sie erkannt?

Schließen als Sprache (1)

Was für eine Sprache ist **SAT**?
Durch welches Automatenmodell wird sie erkannt?

Wir wissen, dass **SAT** entscheidbar ist und daher von Typ 0 ist.
Der folgende naive Algorithmus entscheidet **SAT** auf einer TM:

Naiver Erfüllbarkeitstest (Skizze):

- Wir prüfen systematisch jede Wertzuweisung auf den Atomen der gegebenen Formel
- Dazu iteriert die TM über alle Wertzuweisungen und berechnet für jede rekursiv den Wahrheitswert der Formel
- Falls eine erfüllende Zuweisung gefunden wird, dann hält die TM und akzeptiert
- Falls alle Wertzuweisungen ohne Erfolg durchlaufen worden sind, dann hält die TM und verwirft

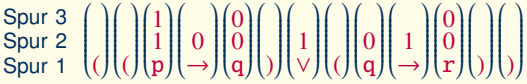
Schließen als Sprache (2)

Was für eine Sprache ist **SAT**?
Durch welches Automatenmodell wird sie erkannt?

Der naive Erfüllbarkeitstest kann in linearem Speicher ablaufen, d.h. auf einem LBA $\rightsquigarrow$ **SAT** ist von Typ 1

Naive Erfüllbarkeit auf LBA (Skizze):

- Wir verwenden ein Arbeitsalphabet mit mehreren „Spuren“: (1) Eingabe, (2) aktuell ermittelte Wahrheitswerte aller Teilformeln, (3) aktuell getestete Wertzuweisung
- Skizze der Kodierung (ohne Binärkodierung der Formel):



- Man kann nun systematisch Spur 3 iterieren, Spur 2 rekursiv berechnen und den Wert der Gesamtformel prüfen (machbar, wir verzichten auf die Details)

Welches Berechnungsmodell passt zu **SAT**?

Erkenntnisse bisher:

- LBAs sind stark genug für **SAT** (d.h. **SAT** ist von Typ 1)
- **SAT** ist keine reguläre Sprache, da FAs korrekte Klammerung nicht erkennen können (d.h. **SAT** ist nicht von Typ 3)

Man kann außerdem zeigen:

SAT ist nicht kontextfrei.

(zumindest wenn eine offensichtliche Kodierung verwendet wird; siehe `http://cstheory.stackexchange.com/questions/37322/is-sat-a-context-free-language`)

Können wir **SAT** noch genauer charakterisieren als mit LBAs?

$\rightsquigarrow$ Ja, mithilfe anderer Arten von eingeschränkten TMs.

Komplexität

Turingmaschinen beschränken

TMs verwenden zwei Ressourcen, die man beschränken kann:

- Speicher: die Zahl der verwendeten Speicherzellen
- Zeit: die Zahl der durchgeführten Berechnungsschritte

Feste Schranken ergeben wenig Sinn (endliche Automaten)

$\rightsquigarrow$ Schranken werden als Funktion in der Länge der Eingabe angegeben

Beispiel: LBAs beschränken den verfügbaren Speicher auf die Anzahl der Symbole in der Eingabe. Dies entspricht einer Funktion, welche die Länge n der Eingabe auf den Maximalwert von n Speicherzellen abbildet.

Zur Erinnerung: O-Notation

Die O-Notation (mit großem O!) charakterisiert Funktionen nach ihrem asymptotischen Verhalten und versteckt lineare Faktoren.

Für Funktionen $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ schreiben wir $f \in O(g)$ wenn gilt:

Es gibt eine Zahl $c > 0$ und eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$,
so dass für jedes $n > n_0$ gilt: $f(n) \leq c \cdot g(n)$

Das bedeutet, f wächst nicht wesentlich schneller als g.

Notation 1: Manchmal schreibt man statt $f \in O(g)$ auch $f = O(g)$ (allerdings ist = dann eine asymmetrische Relation).

Notation 2: Manchmal schreibt man statt $f \in O(g)$ (oder $f = O(g)$) oft auch $f(n) \in O(g(n))$ (oder $f(n) = O(g(n))$).

Beispiele:
- $(10n^3 + 42n^2 - n + 100) \in O(n^3)$
- $(2^n + n^{2000}) \in O(2^n)$
- $2^{729} \in O(1)$

Schranken für Zeit und Raum

Die O-Notation wird verwendet, um allgemeine Ressourcenschranken für TMs anzugeben.

Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $\mathcal{M}$ eine Turingmaschine.

- $\mathcal{M}$ heißt $O(f)$-zeitbeschränkt wenn es eine Funktion $g \in O(f)$ gibt, so dass $\mathcal{M}$ für eine beliebige Eingabe $w \in \Sigma^*$ nach maximal $g(|w|)$ Schritten anhält.
- $\mathcal{M}$ heißt $O(f)$-speicherbeschränkt wenn es eine Funktion $g \in O(f)$ gibt, so dass $\mathcal{M}$ für eine beliebige Eingabe $w \in \Sigma^*$ hält und zuvor maximal $g(|w|)$ Speicherzellen verwendet.

Beispiel: Ein LBA entspricht einer $O(n)$-speicherbeschränkten TM.*

Beispiel: Der naive Erfüllbarkeitstest für **SAT** ist $O(2^n)$-zeitbeschränkt.

*) Wobei man die bei LBAs erzwungene Speicherbeschränkung in das Programm der TM einbauen muss. Unsere LBA-Definition erlaubt keine linearen Faktoren für den Speicherbedarf. Diese haben keinen Einfluss auf die Rechenstärke von LBAs, da man lineare Speichergewinne durch ein größeres Arbeitsalphabet simulieren kann.

Zeit und Raum, deterministisch

Beschränkte TMs können verwendet werden, um viele weitere Sprachklassen zu definieren.

Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

- DTIME(f(n)) ist die Klasse aller Sprachen **L**, welche durch eine $O(f)$-zeitbeschränkte Turingmaschine entschieden werden können.
- DSPACE(f(n)) ist die Klasse aller Sprachen **L**, welche durch eine $O(f)$-speicherbeschränkte Turingmaschine entschieden werden können.

Beispiel: **SAT** $\in$ DTIME(2^n) und **SAT** $\in$ DSPACE(n).

Beispiel: Das Halteproblem ist in keiner der Klassen DTIME$(f(n))$ oder DSPACE$(f(n))$. Unentscheidbare Probleme benötigen uneingeschränkten Zugang zu beliebig vielen Ressourcen einer TM.

Maschinenmodelle

Es gibt viele unterschiedliche Versionen von deterministischen Turingmaschinen (z.B. Mehrband-Maschinen).

Sind DTIME(f) und DSPACE(f) für jedes TM-Modell gleich?

Antwort: „Bei vielen kleineren Variationen sind sie es, aber nicht in allen Fällen (oder zumindest ist dies nicht immer bekannt).“

Beispiel: Jede $O(f(n))$-zeitbeschränkte k-Band-TM kann durch eine $O(k \cdot f^2(n))$-zeitbeschränkte 1-Band TM simuliert werden (wie in Vorlesung 18 gezeigt). Einfacher gesagt: Der Verzicht auf mehrere Bänder verursacht maximal quadratische Zeitkosten (k ist hier ein linearer Faktor).

$\rightsquigarrow$ Es ist sinnvoll, noch allgemeinere Sprachklassen zu betrachten, die auch gegenüber polynomiellen Änderungen der Ressourcen robust sind

Wichtige Komplexitätsklassen

Die wichtigen deterministischen Komplexitätsklassen fassen jeweils ganze Familien von zeit- oder speicherbeschränkten Klassen zusammen. Wir erwähnen hier nur die praktisch wichtigsten:

$$\text{P} = \text{PTime} = \bigcup_{d \geq 1} \text{DTime}(n^d) \qquad \text{polynomielle Zeit}$$

$$\text{Exp} = \text{ExpTime} = \bigcup_{d \geq 1} \text{DTime}(2^{n^d}) \qquad \text{exponentielle Zeit}^*$$

$$\text{L} = \text{LogSpace} = \text{DSpace}(\log n) \qquad \text{logarithmischer Speicher}$$

$$\text{PSpace} = \bigcup_{d \geq 1} \text{DSpace}(n^d) \qquad \text{polynomieller Speicher}$$

*) Anmerkung: Dies ist die praktisch wichtigste Definition von „exponentieller Zeit“. Es gibt daneben auch E = ETime = $\bigcup_{d \geq 1}$ DTime(2^{dn}) (exponentielle Zeit mit linearem Exponenten).

LogSpace? Wie soll das gehen?

Für $n > 1$ gilt $\log(n) < n$. Auch beliebige lineare Faktoren können das nur für kleine n kompensieren.

Eine $O(\log(n))$-speicherbeschränkte TM darf also weniger Speicher verwenden als ihre Eingabe benötigt. $\rightsquigarrow$ Wie soll das gehen?

Man definiert $O(\log(n))$-speicherbeschränkte Turingmaschinen als besondere Mehrband-TMs:

- Das erste Band ist das Eingabeband. Es enthält die Eingabe und darf nur gelesen aber nicht beschrieben werden.
- Das zweite Band ist das Arbeitsband. Es darf beliebig gelesen und beschrieben werden, aber es ist auf $O(\log(n))$-Speicherzellen beschränkt.

Das genügt zur Erkennung von Sprachen. Wenn die TM eine Ausgabe berechnen soll, dann wird dafür ein drittes Ausgabeband verwendet, auf dem man beliebig viele Zeichen einmalig schreiben aber nicht lesen kann.

Beziehungen der Komplexitätsklassen

Eine wichtige Frage der Komplexitätstheorie ist, was man über die Beziehungen der Komplexitätsklassen aussagen kann.

Offensichtlich führen (asymptotisch) höhere Ressourcenschranken zu größeren Sprachklassen. Oft ist aber nicht klar, ob man mit mehr Ressourcen auch wirklich mehr (oder einfach nur gleich viele) Probleme lösen kann. Bei unseren Klassen ist das aber bekannt:

Fakt: Es gilt P $\subsetneq$ Exp und LogSpace $\subsetneq$ PSpace.

Weiterhin kann man Speicher mit Zeit in Beziehung bringen:

- In Zeit n kann man nur n Speicherzellen nutzen
- Alle möglichen Konfigurationen auf n Speicherzellen kann man in exponentieller Zeit (bezüglich n) berechnen
  (für LBAs haben wir das in Vorlesung 20 besprochen; siehe „Konfigurationsgraph“)

Fakt: Es gilt LogSpace $\subseteq$ P $\subseteq$ PSpace $\subseteq$ Exp.

Beispiele

Unsere Klassen sind recht robust: Details der Implementierung haben oft keinen Einfluss auf die Einordnung eines Problems.
Oft genügt eine Implementierungsskizze um zu zeigen, dass eine Sprache in einer dieser Klassen liegt.

Beispiel: Erfüllbarkeit von propositionaler Horn-Logik ist in P. Unser Resolutionsalgorithmus liefert allerdings keinen Hinweis auf Machbarkeit in LogSpace.

Beispiel: **SAT** ist in ExpTime aber auch in PSpace.

Beispiel: Das Wortproblem jeder regulären Sprache ist in LogSpace. Tatsächlich benötigt ein DFA gar keinen Speicher.

Beispiel: Die Transformation einer Formel in Negationsnormalform ist in LogSpace möglich. Dies ist kein Spracherkennungsproblem sondern eine Berechnung mit Ein- und Ausgabe.

Ressourcen nichtdeterministischer TMs

Bei NTMs gibt es viele mögliche Berechnungspfade.
$\rightsquigarrow$ Welche Pfade meinen wir, wenn wir Ressourcen beschränken?

– Alle!

Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $\mathcal{M}$ eine nichtdeterministische TM.

- $\mathcal{M}$ heißt $O(f)$-zeitbeschränkt wenn es eine Funktion $g \in O(f)$ gibt, so dass $\mathcal{M}$ für eine beliebige Eingabe $w \in \Sigma^*$ auf jedem Berechnungspfad nach maximal $g(|w|)$ Schritten anhält.
- $\mathcal{M}$ heißt $O(f)$-speicherbeschränkt wenn es eine Funktion $g \in O(f)$ gibt, so dass $\mathcal{M}$ für eine beliebige Eingabe $w \in \Sigma^*$ hält und zuvor auf jedem Berechnungspfad maximal $g(|w|)$ Speicherzellen verwendet.

Eine zeit- oder speicherbeschränkte NTM muss also auch auf erfolglosen Pfaden („falsch geratene Übergänge“) garantiert innerhalb der Ressourcengrenzen halten.

Zeit und Raum, nichtdeterministisch

Die entsprechenden Sprachklassen werden genau wie bei deterministischen TMs definiert:

Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

- NTIME(f(n)) ist die Klasse aller Sprachen **L**, welche durch eine $O(f)$-zeitbeschränkte NTM entschieden werden können.
- NSPACE(f(n)) ist die Klasse aller Sprachen **L**, welche durch eine $O(f)$-speicherbeschränkte NTM entschieden werden können.

Nichtdeterministische Komplexitätsklassen

Auch hier beschränken wir uns auf einige wichtige Fälle:

$$\text{NP} = \text{NPTime} = \bigcup_{d \geq 1} \text{NTime}(n^d) \qquad \text{nichtdet. polynomielle Zeit}$$

$$\text{NExp} = \text{NExpTime} = \bigcup_{d \geq 1} \text{NTime}(2^{n^d}) \qquad \text{nichtdet. exponentielle Zeit}$$

$$\text{NL} = \text{NLogSpace} = \text{NSpace}(\log n) \qquad \text{nichtdet. logarithmischer Speicher}$$

$$\text{NPSpace} = \bigcup_{d \geq 1} \text{NSpace}(n^d) \qquad \text{nichtdet. polynomieller Speicher}$$

Beispiel: **SAT** $\in$ NP. Man kann unseren naiven Erfüllbarkeitstest auf einer NTM so implementieren, dass nur eine (erfüllende) Wertzuweisung geraten wird. Der Wahrheitswert der Formel für diese Zuweisung kann in polynomieller Zeit überprüft werden.

Deterministisch vs. nichtdeterministisch

Welche Beziehungen haben diese Klassen zu anderen?

- Die Beziehungen zwischen nichtdeterministischen Klassen sind analog zu denen im deterministischen Fall:

  $$\text{NL} \subseteq \text{NP} \subseteq \text{NPSpace} \subseteq \text{NExp}$$

- Eine DTM kann als NTM aufgefasst werden, d.h. die nichtdeterministischen Klassen sind immer stärker:

  $$\text{L} \subseteq \text{NL} \qquad \text{P} \subseteq \text{NP} \qquad \text{PSpace} \subseteq \text{NPSpace} \qquad \text{Exp} \subseteq \text{NExp}$$

- Man kann NTMs mit DTMs simulieren, aber das ist oft mit exponentiellen Mehrkosten verbunden (Vorlesung 19).
- Der berühmte Satz von Savitch besagt, dass speicherbeschränkte NTMs durch DTMs mit nur quadratischen Mehrkosten simuliert werden können. Insbesondere gilt damit PSpace = NPSpace.

Zusammenfassung der wichtigsten bekannten Beziehungen:

$$\text{L} \subseteq \text{NL} \subseteq \text{P} \subseteq \text{NP} \subseteq \text{PSpace} = \text{NPSpace} \subseteq \text{Exp} \subseteq \text{NExp}$$

Die Grenzen unseres Wissens

Wir wissen:

$$\text{L} \subseteq \text{NL} \subseteq \text{P} \subseteq \text{NP} \subseteq \text{PSpace} = \text{NPSpace} \subseteq \text{Exp} \subseteq \text{NExp}$$

- Wir wissen nicht, ob irgendeines dieser $\subseteq$ sogar $\subsetneq$ ist.
- Insbesondere wissen wir nicht, ob $\text{P} \subsetneq \text{NP}$ oder $\text{P} = \text{NP}$.
- Wir wissen nicht einmal, ob $\text{L} \subsetneq \text{NP}$ oder $\text{L} = \text{NP}$.

Es wird aber vermutet, dass alle $\subseteq$ eigentlich $\subsetneq$ sind. Bekannt ist das aber nur bei exponentiell großen Ressourcenunterschieden:

Es gilt:

- $\text{NL} \subsetneq \text{PSpace}$
- $\text{P} \subsetneq \text{Exp}$
- $\text{NP} \subsetneq \text{NExp}$

Zusammenfassung und Ausblick

Komplexitätsklassen sind Mengen von Sprachen, die man (grob) einteilt entsprechend der Ressourcen, die eine TM zur Entscheidung ihres Wortproblems benötigt.

Horn-Logik erlaubt logisches Schließen in P.

Das propositionale Erfüllbarkeitsproblem **SAT** ist in NP.

Offene Fragen:

- Gibt es auch sub-exponentielle Algorithmen für aussagenlogisches Schließen?
- Gilt P $\neq$ NP?