



Formale Systeme

1. Übungsblatt

Wintersemester 2016/17

Hinweis

Die Aufgaben *) und **) dienen der Selbstkontrolle und werden in der Übung nicht besprochen.

*) Es sei $\Sigma_1 = \{a, b, c\}$ und $\Sigma_2 = \{0, 1\}$. Beschreiben Sie folgende Mengen verbal oder durch Aufzählung:

Σ_1^* , Σ_1^+ , Σ_1^2 , $\Sigma_1 \cdot (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)^*$, $\mathcal{P}(\Sigma_1)$, $\mathcal{P}(\Sigma_1^*)$.

**) Beschreiben Sie folgende Mengen, die über die Operationen Vereinigung, Konkatination und Kleene-Stern gebildet werden, verbal oder durch Aufzählung:

$\{a\} \cup \{b\} \cup \{c\}$, $\{a\} \cdot \{b\} \cdot \{c\}$, $\{a\} \cup \{b\} \cdot \{a\} \cup \{b\}$, $\{a\}^*$, $(\{a\} \cup \{b\} \cup \{c\})^*$,
 $(\{a\} \cdot \{b\} \cdot \{c\})^*$, $\{a\} \cup \{a\}^* \cdot \{b\}$, $(\{0\} \cup \{1\})^*$, $(\{1\} \cup \{1\} \cdot \{0\})^*$,
 $(\{0\} \cup \{1\})^* \cdot \{0\} \cdot \{0\} \cdot (\{0\} \cup \{1\})^*$.

Aufgabe 1

Gegeben sind ein beliebiges Alphabet Σ und die Sprachen L_1, L_2, L_3, L_4 .

Zeigen Sie, dass die Operationen \cup , \cdot und $*$ monoton sind, d. h. für $L_1 \subseteq L_3$ und $L_2 \subseteq L_4$ gilt:

$$L_1 \cup L_2 \subseteq L_3 \cup L_4, \quad L_1 \cdot L_2 \subseteq L_3 \cdot L_4 \text{ bzw. } L_1^* \subseteq L_3^* \text{ mit } L_1, L_2, L_3, L_4 \subseteq \Sigma^*.$$

Aufgabe 2

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Identitäten. Dabei sind L, L_1, L_2, L_3 beliebige Sprachen.

- $L_1 \cdot (L_2 \cup L_3) = L_1 \cdot L_2 \cup L_1 \cdot L_3$
- $(\{a\} \cdot \{b\} \cup \{a\})^* \cdot \{a\} = \{a\} \cdot (\{b\} \cdot \{a\} \cup \{a\})^*$
- $(\{a\} \cup \{b\})^* = \{a\}^* \cup \{b\}^*$
- $\emptyset^* = \{\varepsilon\}$, $(\{\varepsilon\} \cup L)^* = L^*$, $(L^*)^* = L^*$
- $(L_1^* \cup L_2^*)^* = (L_1 \cup L_2)^*$
- $L \cdot L^* = L^+$, $L^* \cdot L^* = L^*$, $L^* \cup L = L^*$

Aufgabe 3

Untersuchen Sie die folgenden Quadrupel, ob sie eine Grammatik definieren. Wenn das der Fall ist, geben Sie jeweils den maximalen Chomsky-Typ der Grammatik an und begründen Sie die Einordnung.

- $G_1 = (N, \Sigma, P, S)$ mit
 $N = \{S, A\}$, $\Sigma = \{a, b\}$,
 $P = \{\varepsilon \rightarrow b, S \rightarrow Ab\}$
- $G_2 = (N, \Sigma, P, S)$ mit
 $N = \{S\}$, $\Sigma = \{a, b\}$,
 $P = \{S \rightarrow aSb, S \rightarrow \varepsilon\}$
- $G_3 = (N, \Sigma, P, S)$ mit
 $N = \{S, X, Y\}$, $\Sigma = \{a, b\}$,
 $P = \{XY \rightarrow Y, S \rightarrow aYb, S \rightarrow XY, Y \rightarrow a\}$
- $G_4 = (N, \Sigma, P, S)$ mit
 $N = \{S, X, Y\}$, $\Sigma = \{a, b\}$,
 $P = \{S \rightarrow aY, X \rightarrow a, Y \rightarrow bS, Y \rightarrow b, Y \rightarrow bX\}$
- $G_5 = (N, \Sigma, P, S)$ mit
 $N = \{S, X, Y, Z\}$, $\Sigma = \{a, b\}$,
 $P = \{X \rightarrow b, Y \rightarrow aYYb, aY \rightarrow aZ, ZY \rightarrow ZX, S \rightarrow Y, Z \rightarrow a\}$
- $G_6 = (N, \Sigma, P, S)$ mit
 $N = \{S, W, X, Y, Z\}$, $\Sigma = \{a, b\}$,
 $P = \{X \rightarrow b, Y \rightarrow aYYb, aY \rightarrow aZ, ZY \rightarrow ZX, S \rightarrow Y, S \rightarrow \varepsilon, Z \rightarrow a, W \rightarrow S\}$

Aufgabe 4

Gegeben ist die Grammatik $G = (N, \Sigma, P, S)$ mit
 $N = \{S, B\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$, $P = \{S \rightarrow aSBc, S \rightarrow abc, cB \rightarrow B, cB \rightarrow Bc, bB \rightarrow bb\}$.

- Von welchem maximalen Typ ist G ? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Bestimmen Sie drei Wörter w der Sprache $L(G)$. Begründen Sie Ihre Antwort.
- Gilt $\varepsilon \in L(G)$? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Beschreiben Sie die durch G erzeugte Sprache $L(G)$.

Aufgabe 5

Gegeben sind die Grammatiken G_k mit $1 \leq k \leq 4$:

- $G_1 = (N, \Sigma, P, S)$ mit
 $N = \{S, T\}$, $\Sigma = \{a, b\}$,
 $P = \{S \rightarrow aT, S \rightarrow \varepsilon, T \rightarrow Sb\}$
- $G_2 = (N, \Sigma, P, S)$ mit
 $N = \{S, A, B\}$, $\Sigma = \{a, b\}$,
 $P = \{S \rightarrow SAS, S \rightarrow SBBS, S \rightarrow \varepsilon, A \rightarrow a, B \rightarrow b\}$
- $G_3 = (N, \Sigma, P, S)$ mit
 $N = \{S, A, B\}$, $\Sigma = \{a, b\}$,
 $P = \{S \rightarrow A, S \rightarrow \varepsilon, A \rightarrow ab, A \rightarrow aBb, aB \rightarrow aaBb, aB \rightarrow a\}$

- $G_4 = (N, \Sigma, P, S)$ mit
 $N = \{S, T\}$, $\Sigma = \{a, b\}$,
 $P = \{S \rightarrow aSb, S \rightarrow aTb, S \rightarrow \varepsilon, aTb \rightarrow T, aTb \rightarrow S\}$.
- a) Geben Sie zu jeder dieser Grammatiken G_k das maximale i an, so dass G_k eine Grammatik vom Typ i ist.
- b) Beschreiben Sie $L(G_k)$ in einer geeigneten Form, z. B. mittels einer Mengennotation.