TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Informatik, Institut für Künstliche Intelligenz, Professur Computational Logic

Dr. habil. Hannes Straß | Dr. Dörthe Arndt

Übungen zur Lehrveranstaltung

Formale Systeme

Wintersemester 2021/22

1. Übungsblatt

Woche vom 18. bis 22. Oktober 2021

Aufgabe zur Selbstkontrolle (diese werden in den Übungen nicht besprochen)

S1) Es sei $\Sigma_1 = \{a, b, c\}$ und $\Sigma_2 = \{0, 1\}$. Beschreiben Sie folgende Mengen verbal oder durch Aufzählung:

$$\Sigma_1{}^*,\ \Sigma_1{}^+,\ \Sigma_1{}^2,\ \Sigma_1 \circ (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)^*,\ \mathcal{P}(\Sigma_1),\ \mathcal{P}(\Sigma_1{}^*)$$

S2) Beschreiben Sie folgende Mengen, die über die Operationen Vereinigung, Konkatenation und Kleene-Stern gebildet werden, verbal oder durch Aufzählung:

$$\{a\}\cup\{b\}\cup\{c\},\quad \{a\}\circ\{b\}\circ\{c\},\quad \{a\}\cup\{b\}\circ\{a\}\cup\{b\},\quad \{a\}^*,\quad (\{a\}\cup\{b\}\cup\{c\})^*,$$

$$(\{a\}\circ\{b\}\circ\{c\})^*,\quad \{a\}\cup\{a\}^*\circ\{b\},\quad (\{0\}\cup\{1\})^*,\quad (\{1\}\cup\{1\}\circ\{0\})^*,$$

$$(\{0\}\cup\{1\})^*\circ\{0\}\circ\{0\}\circ(\{0\}\cup\{1\})^*$$

Aufgabe 1

Gegeben sind ein beliebiges Alphabet Σ und die Sprachen $L_1, L_2, L_3, L_4 \subseteq \Sigma^*$. Zeigen Sie, dass die Operationen $\cup$, $\circ$ und * monoton sind, d.h. für $L_1 \subseteq L_3$ und $L_2 \subseteq L_4$ gilt:

a) $L_1 \cup L_2 \subseteq L_3 \cup L_4$

b) $L_1 \circ L_2 \subseteq L_3 \circ L_4$

c) $L_1{}^* \subseteq L_3{}^*$

Aufgabe 2

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Identitäten. Dabei sind L, L_1, L_2, L_3 beliebige Sprachen.

a) $L_1 \circ (L_2 \cup L_3) = L_1 \circ L_2 \cup L_1 \circ L_3$

b) $(\{a\} \circ \{b\} \cup \{a\})^* \circ \{a\} = \{a\} \circ (\{b\} \circ \{a\} \cup \{a\})^*$

c) $(\{a\} \cup \{b\})^* = \{a\}^* \cup \{b\}^*$

d) $\emptyset^* = \{\varepsilon\}, \quad (\{\varepsilon\} \cup L)^* = L^*, \quad (L^*)^* = L^*$

e) $({L_1}^* \cup {L_2}^*)^* = (L_1 \cup L_2)^*$

f) $L \circ L^* = L^+, \quad L^* \circ L^* = L^*, \quad L^* \cup L = L^*$

Aufgabe 3

Gegeben ist die Grammatik $G = \langle V, \Sigma, P, S\rangle$ mit $V = \{S, A\}, \Sigma = \{1, 0\}$ und
$P = \{S \to 1A1, A \to 1A1, A \to 0A0, A \to \varepsilon\}$

a) Bestimmen Sie drei Wörter w der Sprache $L(G)$. Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Gilt $\varepsilon \in L(G)$? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Beschreiben Sie die durch G erzeugte Sprache $L(G)$ natürlichsprachlich sowie mittels Mengennotation.

Hinweis: Für ein Wort $w \in \Sigma^*$ mit $w = a_1 \cdots a_n$ bezeichnet $w^R = a_n \cdots a_1$.

Aufgabe 4

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Untersuchen Sie die folgenden Tupel daraufhin, ob sie eine Grammatik definieren. Wenn das der Fall ist, geben Sie jeweils den maximalen Chomsky-Typ der Grammatik an und begründen Sie die Einordnung.

- $G_1 = \langle V_1, \Sigma, P_1, S_1\rangle$ mit $V_1 = \{S_1, A\}$ und
  $P_1 = \{\varepsilon \to b,\ S_1 \to Ab\}$
- $G_2 = \langle V_2, \Sigma, P_2, S_2\rangle$ mit $V_2 = \{S_2\}$ und
  $P_2 = \{S_2 \to aS_2b,\ S_2 \to \varepsilon\}$
- $G_3 = \langle V_3, \Sigma, P_3, S_3\rangle$ mit $V_3 = \{S_3, X, Y\}$ und
  $P_3 = \{XY \to Y,\ S_3 \to aYb,\ S_3 \to XY,\ Y \to a\}$
- $G_4 = \langle V_4, \Sigma, P_4, S_4\rangle$ mit $V_4 = \{S_4, X, Y\}$ und
  $P_4 = \{S_4 \to aY,\ X \to a,\ Y \to bS_4,\ Y \to b,\ Y \to bX\}$
- $G_5 = \langle V_5, \Sigma, P_5, S_5\rangle$ mit $V_5 = \{S_5, X, Y, Z\}$ und
  $P_5 = \{X \to b,\ Y \to aYYb,\ aY \to aZ,\ ZY \to ZX,\ S_5 \to Y,\ Z \to a\}$
- $G_6 = \langle V_6, \Sigma, P_6, S_6\rangle$ mit $V_6 = \{S_6, W, X, Y, Z\}$ und
  $P_6 = \{X \to b,\ Y \to aYYb,\ aY \to aZ,\ ZY \to ZX,\ S_6 \to Y,\ S_6 \to \varepsilon,\ Z \to a,\ W \to S_6\}$

Aufgabe 5

a) Geben Sie eine Grammatik für die Menge aller korrekt geschachtelten Klammerausdrücke bestehend aus den Klammern (,), [,], {, } an.

(Beispiele: ([( )]) { [ ] } ist korrekt geschachtelt, ([ ) und ([ ] } [ ] jedoch nicht.)

b) Geben Sie eine Ableitung des korrekten Klammerausdrucks { ( ) ([ ]) } an.