TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Informatik, Institut für Künstliche Intelligenz, Professur für Computational Logic

FORMALE SYSTEME

10. Vorlesung: Grenzen regulärer Sprachen / Probleme für Automaten

Hannes Straß

TU Dresden, 11. November 2021

Rückblick

Minimale Automaten

Für jede reguläre Sprache **L** . . .

. . . gibt es einen minimalen (totalen) DFA,

. . . der eindeutig ist (bis auf Umbenennung von Zuständen),

. . . den man durch Reduktion jedes beliebigen DFA für **L** erhalten kann,

. . . oder auch als Myhill-Nerode-Minimalautomat.

Allerdings ist der minimale DFA unter Umständen viel größer als ein minimaler NFA.
(Dafür ist letzterer schwerer zu finden und nicht eindeutig.)

Aufzeichnung startet . . .

Nichtreguläre Sprachen

Nichtreguläre Sprachen

Sind alle Sprachen regulär?
Sicher nicht, dazu gibt es zu viele Sprachen.

Sind alle Typ-0-Sprachen regulär?
Nein, auch das gilt nicht.

Wie aber zeigt man das?

- Behauptung „Sprache **L** ist regulär!“ $\rightsquigarrow$ Es genügt, einen Automaten, regulären Ausdruck oder eine Typ-3-Grammatik für **L** anzugeben.
- Behauptung „Sprache **L** ist nicht regulär!“ $\rightsquigarrow$ Man müsste zeigen, dass es keinen Automaten, keinen regulären Ausdruck bzw. keine Typ-3-Grammatik für **L** gibt.

Nichtregularität mit Myhill & Nerode

Der Satz von Myhill & Nerode liefern uns ein besseres Kriterium:

Satz (Myhill & Nerode):
Eine Sprache $\mathbf{L}$ ist genau dann regulär, wenn $\simeq_{\mathbf{L}}$ endlich viele Äquivalenzklassen hat.

Daraus folgt:

Satz: Wenn $\simeq_{\mathbf{L}}$ unendlich viele Äquivalenzklassen hat, dann ist $\mathbf{L}$ nicht regulär.

Nichtregularität mit Myhill & Nerode

Der Satz von Myhill & Nerode liefern uns ein besseres Kriterium:

Satz (Myhill & Nerode):
Eine Sprache $\mathbf{L}$ ist genau dann regulär, wenn $\simeq_{\mathbf{L}}$ endlich viele Äquivalenzklassen hat.

Daraus folgt:

Satz: Wenn $\simeq_{\mathbf{L}}$ unendlich viele Äquivalenzklassen hat, dann ist $\mathbf{L}$ nicht regulär.

Beispiel: Wir haben gesehen, dass die Sprache $\{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \mid n \geq 0\}$ unendlich viele Äquivalenzklassen erzeugt. Diese Sprache ist demnach nicht regulär.

$a^n b^n$

Die Sprache $a^n b^n$ gilt als Musterbeispiel nichtregulärer Sprachen.

Intuition: „Reguläre Sprachen können nicht zählen."

Ein Automat, der diese Sprache erkennen wollte, müsste die genaue Zahl der schon gelesenen as speichern.
$\leadsto$ Dazu wäre beliebig viel Speicher nötig.

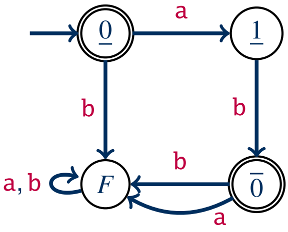
$\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n$

Die Sprache $\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n$ gilt als Musterbeispiel nichtregulärer Sprachen.

Intuition: „Reguläre Sprachen können nicht zählen.“

Ein Automat, der diese Sprache erkennen wollte, müsste die genaue Zahl der schon gelesenen $\mathtt{a}$s speichern.

$\leadsto$ Dazu wäre beliebig viel Speicher nötig. Z.B. für $\{ \mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \mid 0 \leq n \leq 1 \}$:



Viele Sprachdefinitionen mit Bezug zu konkreten Zahlen verhalten sich ähnlich.

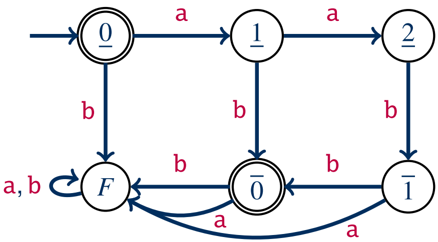
$\mathsf{a}^n\mathsf{b}^n$

Die Sprache $\mathsf{a}^n\mathsf{b}^n$ gilt als Musterbeispiel nichtregulärer Sprachen.

> Intuition: „Reguläre Sprachen können nicht zählen.“

Ein Automat, der diese Sprache erkennen wollte, müsste die genaue Zahl der schon gelesenen as speichern.

$\leadsto$ Dazu wäre beliebig viel Speicher nötig. Z.B. für $\{\, \mathsf{a}^n\mathsf{b}^n \mid 0 \leq n \leq 2 \,\}$:



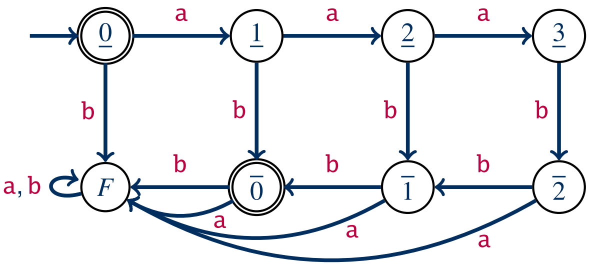
Viele Sprachdefinitionen mit Bezug zu konkreten Zahlen verhalten sich ähnlich.

$\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n$

Die Sprache $\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n$ gilt als Musterbeispiel nichtregulärer Sprachen.

Intuition: „Reguläre Sprachen können nicht zählen.“

Ein Automat, der diese Sprache erkennen wollte, müsste die genaue Zahl der schon gelesenen $\mathtt{a}$s speichern.
$\rightsquigarrow$ Dazu wäre beliebig viel Speicher nötig. Z.B. für $\{\, \mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \mid 0 \leq n \leq 3 \,\}$:



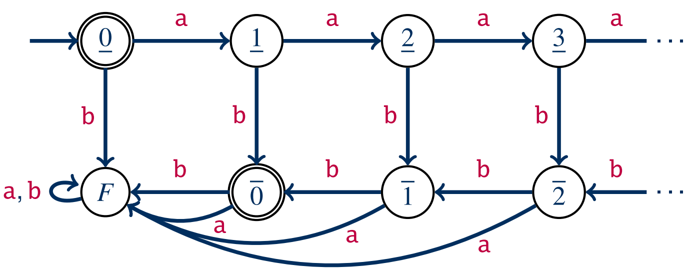
Viele Sprachdefinitionen mit Bezug zu konkreten Zahlen verhalten sich ähnlich.

$a^n b^n$

Die Sprache $a^n b^n$ gilt als Musterbeispiel nichtregulärer Sprachen.

Intuition: „Reguläre Sprachen können nicht zählen.“

Ein Automat, der diese Sprache erkennen wollte, müsste die genaue Zahl der schon gelesenen as speichern.
$\leadsto$ Dazu wäre beliebig viel Speicher nötig. Z.B. für $\{ a^n b^n \mid 0 \leq n \}$:



Kein endlicher Automat!

Viele Sprachdefinitionen mit Bezug zu konkreten Zahlen verhalten sich ähnlich.

Nichtregularität mit Abschlusseigenschaften

Wir haben bereits gezeigt:

Satz: Wenn $\mathbf{L}_1$ und $\mathbf{L}_2$ regulär sind, dann auch $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2$, $\mathbf{L}_1 \cup \mathbf{L}_2$, $\mathbf{L}_1^*$ und $\overline{\mathbf{L}_1}$.

Auch hier liefert die Umkehrung gute Kriterien, z.B.:

Satz: Wenn $\mathbf{L}_1$ regulär und $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2$ nicht regulär ist, dann ist $\mathbf{L}_2$ ebenfalls nicht regulär.

Nichtregularität mit Abschlusseigenschaften

Wir haben bereits gezeigt:

Satz: Wenn $\mathbf{L}_1$ und $\mathbf{L}_2$ regulär sind, dann auch $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2$, $\mathbf{L}_1 \cup \mathbf{L}_2$, $\mathbf{L}_1^*$ und $\overline{\mathbf{L}_1}$.

Auch hier liefert die Umkehrung gute Kriterien, z.B.:

Satz: Wenn $\mathbf{L}_1$ regulär und $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2$ nicht regulär ist, dann ist $\mathbf{L}_2$ ebenfalls nicht regulär.

Beispiel: Wir betrachten über dem Alphabet $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ die Sprache
$\mathbf{L} = \{w \mid w$ enthält ebenso viele $\mathtt{a}$ wie $\mathtt{b}\}$.

Nichtregularität mit Abschlusseigenschaften

Wir haben bereits gezeigt:

Satz: Wenn $\mathbf{L}_1$ und $\mathbf{L}_2$ regulär sind, dann auch $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2$, $\mathbf{L}_1 \cup \mathbf{L}_2$, $\mathbf{L}_1^*$ und $\overline{\mathbf{L}}_1$.

Auch hier liefert die Umkehrung gute Kriterien, z.B.:

Satz: Wenn $\mathbf{L}_1$ regulär und $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2$ nicht regulär ist, dann ist $\mathbf{L}_2$ ebenfalls nicht regulär.

Beispiel: Wir betrachten über dem Alphabet $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ die Sprache
$\mathbf{L} = \{w \mid w$ enthält ebenso viele $\mathtt{a}$ wie $\mathtt{b}\}$.

Dann gilt $\mathbf{L} \cap \{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}^* = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \mid n \geq 0\}$.

Weil $\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}^*$ regulär ist und $\{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \mid n \geq 0\}$ nicht, kann $\mathbf{L}$ ebenfalls nicht regulär sein.

Nichtregularität durch Pumpen

Ein weiteres klassisches Kriterium für Nichtregularität ist, dass die Wörter regulärer Sprachen beliebig „aufgepumpt“ werden können.

Idee:

- Für jeden DFA ist die Menge Q der Zustände endlich.
- Aber manche reguläre Sprachen enthalten beliebig lange Wörter ...

Wie kann ein DFA mit n Zuständen Wörter mit mehr als n Zeichen akzeptieren?

Nichtregularität durch Pumpen

Ein weiteres klassisches Kriterium für Nichtregularität ist, dass die Wörter regulärer Sprachen beliebig „aufgepumpt“ werden können.

Idee:

- Für jeden DFA ist die Menge Q der Zustände endlich.
- Aber manche reguläre Sprachen enthalten beliebig lange Wörter ...

  Wie kann ein DFA mit n Zuständen Wörter mit mehr als n Zeichen akzeptieren?
- Dann muss der DFA beim Einlesen einen Zustand mehr als einmal besuchen.
- Dafür muss es in den Zustandsübergängen eine Schleife geben.
- Diese Schleife kann man aber auch mehr als einmal durchlaufen.

Nichtregularität durch Pumpen

Ein weiteres klassisches Kriterium für Nichtregularität ist, dass die Wörter regulärer Sprachen beliebig „aufgepumpt“ werden können.

Idee:

- Für jeden DFA ist die Menge Q der Zustände endlich.
- Aber manche reguläre Sprachen enthalten beliebig lange Wörter ...

  Wie kann ein DFA mit n Zuständen Wörter mit mehr als n Zeichen akzeptieren?
- Dann muss der DFA beim Einlesen einen Zustand mehr als einmal besuchen.
- Dafür muss es in den Zustandsübergängen eine Schleife geben.
- Diese Schleife kann man aber auch mehr als einmal durchlaufen.

Jedes akzeptierte Wort mit mindestens n Zeichen hat einen Teil, den man beliebig oft wiederholen – „aufpumpen“ – kann.

Das Pumping-Lemma

Satz (Pumping-Lemma):
Für jede reguläre Sprache **L** gibt es eine Zahl $n \geq 0$, so dass gilt:
für jedes Wort $z \in$ **L** mit $|z| \geq n$
gibt es eine Zerlegung $z = uvw$ mit $|v| \geq 1$ und $|uv| \leq n$, so dass:
für jede Zahl $k \geq 0$ gilt: $uv^k w \in$ **L**.

Das Pumping-Lemma

Satz (Pumping-Lemma):
Für jede reguläre Sprache **L** gibt es eine Zahl $n \geq 0$, so dass gilt:
für jedes Wort $z \in \mathbf{L}$ mit $|z| \geq n$
gibt es eine Zerlegung $z = uvw$ mit $|v| \geq 1$ und $|uv| \leq n$, so dass:
für jede Zahl $k \geq 0$ gilt: $uv^k w \in \mathbf{L}$.

Beweis: Sei $\mathcal{M}$ ein DFA für **L** mit $|Q|$ Zuständen.

Das Pumping-Lemma

Satz (Pumping-Lemma):
Für jede reguläre Sprache **L** gibt es eine Zahl $n \geq 0$, so dass gilt:
  für jedes Wort $z \in \mathbf{L}$ mit $|z| \geq n$
    gibt es eine Zerlegung $z = uvw$ mit $|v| \geq 1$ und $|uv| \leq n$, so dass:
      für jede Zahl $k \geq 0$ gilt: $uv^kw \in \mathbf{L}$.

Beweis: Sei $\mathcal{M}$ ein DFA für **L** mit $|Q|$ Zuständen. Wir wählen $n = |Q| + 1$.

Das Pumping-Lemma

Satz (Pumping-Lemma):
Für jede reguläre Sprache **L** gibt es eine Zahl $n \geq 0$, so dass gilt:
für jedes Wort $z \in$ **L** mit $|z| \geq n$
gibt es eine Zerlegung $z = uvw$ mit $|v| \geq 1$ und $|uv| \leq n$, so dass:
für jede Zahl $k \geq 0$ gilt: $uv^k w \in$ **L**.

Beweis: Sei $\mathcal{M}$ ein DFA für **L** mit $|Q|$ Zuständen. Wir wählen $n = |Q| + 1$.
Ein akzeptierender Lauf für ein beliebiges Wort z mit $|z| = \ell \geq n$ muss in den ersten n Schritten einen Zustand p zweimal besuchen (sagen wir: nach i und j Schritten mit $i < j$), hat also die Form: $(i < j \leq n \leq \ell)$

$$q_0 \xrightarrow{z_1} q_1 \xrightarrow{z_2} \ldots \xrightarrow{z_{i-1}} q_{i-1} \xrightarrow{z_i} p \xrightarrow{z_{i+1}} q_{i+1} \xrightarrow{z_{i+2}} \ldots \xrightarrow{z_{j-1}} q_{j-1} \xrightarrow{z_j} p \xrightarrow{z_{j+1}} q_{j+1} \xrightarrow{z_{j+2}} \ldots \xrightarrow{z_\ell} q_\ell$$

Satz (Pumping-Lemma):
Für jede reguläre Sprache **L** gibt es eine Zahl $n \geq 0$, so dass gilt:
für jedes Wort $z \in$ **L** mit $|z| \geq n$
gibt es eine Zerlegung $z = uvw$ mit $|v| \geq 1$ und $|uv| \leq n$, so dass:
für jede Zahl $k \geq 0$ gilt: $uv^kw \in$ **L**.

Beweis: Sei $\mathcal{M}$ ein DFA für **L** mit $|Q|$ Zuständen. Wir wählen $n = |Q| + 1$.
Ein akzeptierender Lauf für ein beliebiges Wort z mit $|z| = \ell \geq n$ muss in den ersten n Schritten einen Zustand p zweimal besuchen (sagen wir: nach i und j Schritten mit $i < j$), hat also die Form: $(i < j \leq n \leq \ell)$

$$q_0 \xrightarrow{z_1} q_1 \xrightarrow{z_2} \ldots \xrightarrow{z_{i-1}} q_{i-1} \xrightarrow{z_i} p \xrightarrow{z_{i+1}} q_{i+1} \xrightarrow{z_{i+2}} \ldots \xrightarrow{z_{j-1}} q_{j-1} \xrightarrow{z_j} p \xrightarrow{z_{j+1}} q_{j+1} \xrightarrow{z_{j+2}} \ldots \xrightarrow{z_\ell} q_\ell$$

Die gesuchte Zerlegung ist $u = z_1 \cdots z_i$, $v = z_{i+1} \cdots z_j$, $w = z_{j+1} \cdots z_\ell$.

Das Pumping-Lemma

Satz (Pumping-Lemma):
Für jede reguläre Sprache **L** gibt es eine Zahl $n \geq 0$, so dass gilt:
für jedes Wort $z \in$ **L** mit $|z| \geq n$
gibt es eine Zerlegung $z = uvw$ mit $|v| \geq 1$ und $|uv| \leq n$, so dass:
für jede Zahl $k \geq 0$ gilt: $uv^k w \in$ **L**.

Beweis: Sei $\mathcal{M}$ ein DFA für **L** mit $|Q|$ Zuständen. Wir wählen $n = |Q| + 1$.
Ein akzeptierender Lauf für ein beliebiges Wort z mit $|z| = \ell \geq n$ muss in den ersten n Schritten einen Zustand p zweimal besuchen (sagen wir: nach i und j Schritten mit $i < j$), hat also die Form: $(i < j \leq n \leq \ell)$

$$q_0 \xrightarrow{z_1} q_1 \xrightarrow{z_2} \ldots \xrightarrow{z_{i-1}} q_{i-1} \xrightarrow{z_i} p \xrightarrow{z_{i+1}} q_{i+1} \xrightarrow{z_{i+2}} \ldots \xrightarrow{z_{j-1}} q_{j-1} \xrightarrow{z_j} p \xrightarrow{z_{j+1}} q_{j+1} \xrightarrow{z_{j+2}} \ldots \xrightarrow{z_\ell} q_\ell$$

Die gesuchte Zerlegung ist $u = z_1 \cdots z_i$, $v = z_{i+1} \cdots z_j$, $w = z_{j+1} \cdots z_\ell$.
Für $k \geq 0$ gilt nun: Der Lauf $(q_0 \ldots q_{i-1}p)(q_{i+1} \ldots q_{j-1}p)^k(q_{j+1} \ldots q_\ell)$ akzeptiert $uv^k w$. $\square$

Beispiel

Beispiel: Die Sprache von $\mathtt{b}^*(\mathtt{ab}^*\mathtt{ab}^*)^*$ (Wörter mit gerader Anzahl $\mathtt{a}s$). Der Parameter n aus dem Pumping-Lemma kann 2 sein:

- Wenn z die Form $\mathtt{b}y$ hat, wähle $u = \epsilon$, $v = \mathtt{b}$ und $w = y$.
- Wenn z die Form $\mathtt{ab}y$ hat, wähle $u = \mathtt{a}$, $v = \mathtt{b}$ und $w = y$.
- Wenn z die Form $\mathtt{aa}y$ hat, wähle $u = \epsilon$, $v = \mathtt{aa}$ und $w = y$.

Beispiel

Beispiel: Die Sprache von $\mathtt{b}^*(\mathtt{ab}^*\mathtt{ab}^*)^*$ (Wörter mit gerader Anzahl $\mathtt{a}s$). Der Parameter n aus dem Pumping-Lemma kann 2 sein:

- Wenn z die Form $\mathtt{b}y$ hat, wähle $u = \epsilon$, $v = \mathtt{b}$ und $w = y$.
- Wenn z die Form $\mathtt{ab}y$ hat, wähle $u = \mathtt{a}$, $v = \mathtt{b}$ und $w = y$.
- Wenn z die Form $\mathtt{aa}y$ hat, wähle $u = \epsilon$, $v = \mathtt{aa}$ und $w = y$.

Beispiel: Für endliche Sprachen ist die Eigenschaft trivial. Man wählt n einfach so groß, dass es keine Wörter z mit $|z| \geq n$ gibt, für welche weitere Eigenschaften gefordert werden.

Pumpen für Nichtregularität

Die Pump-Eigenschaft ist für Regularität notwendig, aber nicht hinreichend: man kann auch manche nichtreguläre Sprachen pumpen.

Daher eignet sich das Pumping-Lemma eher zum Beweis der Nichtregularität.

Pumpen für Nichtregularität

Die Pump-Eigenschaft ist für Regularität notwendig, aber nicht hinreichend: man kann auch manche nichtreguläre Sprachen pumpen.

Daher eignet sich das Pumping-Lemma eher zum Beweis der Nichtregularität.

Beispiel: Sei $\mathbf{L} = \left\{ \mathtt{a}^k \mid k \text{ ist Primzahl} \right\}$.

Pumpen für Nichtregularität

Die Pump-Eigenschaft ist für Regularität notwendig, aber nicht hinreichend: man kann auch manche nichtreguläre Sprachen pumpen.

Daher eignet sich das Pumping-Lemma eher zum Beweis der Nichtregularität.

Beispiel: Sei $\mathbf{L} = \left\{ \mathtt{a}^k \;\middle|\; k \text{ ist Primzahl} \right\}$.

Angenommen, es gäbe einen Wert n, für den diese Sprache aufgepumpt werden kann. Wir betrachten eine Primzahl $\ell > n + 2$. Laut Pump-Eigenschaft finden wir eine Zerlegung von $\mathtt{a}^\ell = uvw$, für die insbesondere gilt (d.h. wir wählen $k = |uw|$): $uv^{|uw|}w \in \mathbf{L}$. Aber $uv^{|uw|}w = \mathtt{a}^{(|v|+1)|uw|} \notin \mathbf{L}$. Widerspruch.

L ist daher nicht regulär.

Quiz: Nichtregularität zeigen

Quiz: Wir haben die Spezifikation einer formalen Sprache $\mathbf{L}$ erhalten und vermuten, dass $\mathbf{L}$ nicht regulär ist. . . .

Ist das Pumping-Lemma sinnvoll?

- **Kontra:** Der Satz von Myhill-Nerode liefert ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für Regularität.
  $\leadsto$ Myhill-Nerode ist immer anwendbar, um (Nicht-)Regularität zu zeigen.
- **Pro:** Das Pumping-Lemma funktioniert in den allermeisten praktischen Fällen auch. (Notfalls kann man Abschlusseigenschaften zu Hilfe nehmen.)
- **Pro:** Manchmal ist der Beweis mittels Pumping-Lemma einfacher.
- **Kontra:** Das formale Pumping-Lemma ist relativ kompliziert.
- **Pro:** Die Pumping-Idee ist intuitiv und wir werden sie später noch einmal bei kontextfreien Sprachen nutzen.

Algorithmen für Automaten

Wichtige Probleme für Sprachen

Das Wortproblem für eine Sprache **L** über Alphabet Σ besteht darin, die folgende Funktion zu berechnen:

Eingabe: ein Wort $w \in \Sigma^*$
Ausgabe: „ja“ wenn $w \in \mathbf{L}$ und „nein“ wenn $w \notin \mathbf{L}$

Ziel bei der Lösung des Wortproblems:

- Finde einen Algorithmus, der diese Funktion berechnet.
- Die Sprache **L** ist nicht Teil der Eingabe, sondern fester Bestandteil des Algorithmus.
- Es ist daher unerheblich, wie wir Sprachen darstellen (Grammatik, Automat, ...).

Wichtige Probleme für Automaten

Das Wortproblem für FAs über Alphabet Σ besteht darin, die folgende Funktion zu berechnen:

Eingabe: ein FA $\mathcal{M}$ und ein Wort $w \in \Sigma^*$
Ausgabe: „ja" wenn $w \in \mathbf{L}(\mathcal{M})$ und „nein" wenn $w \notin \mathbf{L}(\mathcal{M})$

- Hier ist die Sprache als FA gegeben, also Teil der Eingabe.
- Die Repräsentation (DFA oder NFA?) spielt unter Umständen eine wichtige Rolle.

Wichtige Probleme für Automaten

Das Wortproblem für FAs über Alphabet Σ besteht darin, die folgende Funktion zu berechnen:

Eingabe: ein FA $\mathcal{M}$ und ein Wort $w \in \Sigma^*$
Ausgabe: „ja“ wenn $w \in \mathbf{L}(\mathcal{M})$ und „nein“ wenn $w \notin \mathbf{L}(\mathcal{M})$

- Hier ist die Sprache als FA gegeben, also Teil der Eingabe.
- Die Repräsentation (DFA oder NFA?) spielt unter Umständen eine wichtige Rolle.

Das Leerheitsproblem für FAs über Alphabet Σ besteht darin, die folgende Funktion zu berechnen:

Eingabe: ein FA $\mathcal{M}$ über Alphabet Σ
Ausgabe: „ja“ wenn $\mathbf{L}(\mathcal{M}) = \emptyset$ und „nein“ wenn $\mathbf{L}(\mathcal{M}) \neq \emptyset$

Wichtige Probleme für Automaten (2)

Das Inklusionsproblem für FAs über Alphabet Σ besteht darin, die folgende Funktion zu berechnen:

Eingabe: zwei FAs $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ über Alphabet Σ
Ausgabe: „ja“ wenn $\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \subseteq \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$; andernfalls „nein“

Das Äquivalenzproblem für FAs über Alphabet Σ besteht darin, die folgende Funktion zu berechnen:

Eingabe: zwei FAs $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ über Alphabet Σ
Ausgabe: „ja“ wenn $\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) = \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$; andernfalls „nein“

Wichtige Probleme für Automaten (2)

Das Inklusionsproblem für FAs über Alphabet Σ besteht darin, die folgende Funktion zu berechnen:

Eingabe: zwei FAs $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ über Alphabet Σ
Ausgabe: „ja" wenn $\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \subseteq \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$; andernfalls „nein"

Das Äquivalenzproblem für FAs über Alphabet Σ besteht darin, die folgende Funktion zu berechnen:

Eingabe: zwei FAs $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ über Alphabet Σ
Ausgabe: „ja" wenn $\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) = \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$; andernfalls „nein"

Manche Probleme kann man mittels anderer ausdrücken:

- $\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) = \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$ gdw. $\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \subseteq \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$ und $\mathbf{L}(\mathcal{M}_2) \subseteq \mathbf{L}(\mathcal{M}_1)$
- $\mathbf{L}(\mathcal{M}) = \emptyset$ gdw. $\mathbf{L}(\mathcal{M}) \subseteq \mathbf{L}(\mathcal{M}_\emptyset)$, wobei $\mathcal{M}_\emptyset$ ein FA ist, der keine Wörter akzeptiert

Wir werden noch mehr solche Reduktionen sehen.

Das Leerheitsproblem für DFA und NFA

Das Leerheitsproblem für FAs über Alphabet Σ besteht darin, die folgende Funktion zu berechnen:

Eingabe: ein FA $\mathcal{M}$ über Alphabet Σ
Ausgabe: „ja" wenn $\mathbf{L}(\mathcal{M}) = \emptyset$ und „nein" wenn $\mathbf{L}(\mathcal{M}) \neq \emptyset$

Anwendungsbeispiel: Eingabefeld für E-Mail-Adressen

- Für den Mitgliedsbereich einer Webseite/App soll in Formularfeldern für E-Mail-Adressen die Eingabe geprüft werden.
- Dafür wurde ein regulärer Ausdruck r entworfen. (Siehe Beispiel in VL 6.)
- Der Ausdruck r kann in einen endlichen Automaten $\mathcal{M}_r$ umgewandelt werden.
- Leerheitstest: Prüfe, ob die Spezifikation $\mathcal{M}_r$ überhaupt erfüllt werden kann.
  $\leadsto$ Gibt es überhaupt eine E-Mail-Adresse, die vom Ausdruck r akzeptiert würde?

Komplexität des Leerheitsproblems

Das Leerheitsproblem ist leicht zu lösen:

Satz: Die Leerheit eines NFA (oder auch DFA) kann in polynomieller Zeit entschieden werden.

Komplexität des Leerheitsproblems

Das Leerheitsproblem ist leicht zu lösen:

Satz: Die Leerheit eines NFA (oder auch DFA) kann in polynomieller Zeit entschieden werden.

Beweis: Ein Automat akzeptiert genau dann die leere Sprache $\emptyset$, wenn es keinen von einem Startzustand aus erreichbaren Endzustand gibt.

Erreichbarkeit von Endzuständen kann mit Hilfe von Graphalgorithmen zur Erreichbarkeitsprüfung (Breitensuche, iterativ vertiefende Tiefensuche, . . .) getestet werden. Einfache Algorithmen laufen in $O(|Q| \cdot |\delta|)$, wobei $|Q|$ die Zahl der Zustände und $|\delta|$ die Gesamtzahl der Kanten im Graph des Automaten ist. □

Das Inklusionsproblem für DFA und NFA

Das Inklusionsproblem für FAs über Alphabet Σ besteht darin, die folgende Funktion zu berechnen:

Eingabe: zwei FAs $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ über Alphabet Σ
Ausgabe: „ja“ wenn $\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \subseteq \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$; andernfalls „nein“

Anwendungsbeispiel: Eingabefeld für E-Mail-Adressen, Systemmigration/-update

- alte Spezifikation $\mathcal{M}_{\text{alt}}$
- neue Spezifikation $\mathcal{M}_{\text{neu}}$
- Inklusionstest $\mathbf{L}(\mathcal{M}_{\text{alt}}) \subseteq \mathbf{L}(\mathcal{M}_{\text{neu}})$: Prüfe, ob alle vorherig erkannten Adressen immer noch erkannt werden.
- Inklusionstest in beide Richtungen: Prüfe, ob die beiden Ausdrücke äquivalent sind.

Lösen des Inklusionsproblems

Wie kann man $\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \subseteq \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$ testen?

Lösen des Inklusionsproblems

Wie kann man $\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \subseteq \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$ testen?

Reduktion auf Leerheitsproblem:

$\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \subseteq \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$ gdw. für jedes $w \in \mathbf{L}(\mathcal{M}_1)$ gilt $w \in \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$

Lösen des Inklusionsproblems

Wie kann man $\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \subseteq \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$ testen?

Reduktion auf Leerheitsproblem:

$\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \subseteq \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$	gdw.	für jedes $w \in \mathbf{L}(\mathcal{M}_1)$ gilt $w \in \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$
	gdw.	es gibt kein $w \in \mathbf{L}(\mathcal{M}_1)$ mit $w \notin \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$

Lösen des Inklusionsproblems

Wie kann man $\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \subseteq \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$ testen?

Reduktion auf Leerheitsproblem:

$\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \subseteq \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$	gdw.	für jedes $w \in \mathbf{L}(\mathcal{M}_1)$ gilt $w \in \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$
	gdw.	es gibt kein $w \in \mathbf{L}(\mathcal{M}_1)$ mit $w \notin \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$
	gdw.	es gibt kein $w \in \mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \cap (\Sigma^* \setminus \mathbf{L}(\mathcal{M}_2))$

Lösen des Inklusionsproblems

Wie kann man $\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \subseteq \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$ testen?

Reduktion auf Leerheitsproblem:

$\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \subseteq \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$	gdw.	für jedes $w \in \mathbf{L}(\mathcal{M}_1)$ gilt $w \in \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$
	gdw.	es gibt kein $w \in \mathbf{L}(\mathcal{M}_1)$ mit $w \notin \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$
	gdw.	es gibt kein $w \in \mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \cap (\Sigma^* \setminus \mathbf{L}(\mathcal{M}_2))$
	gdw.	$\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \cap (\Sigma^* \setminus \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)) = \emptyset$

Lösen des Inklusionsproblems

Wie kann man $\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \subseteq \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$ testen?

Reduktion auf Leerheitsproblem:

$\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \subseteq \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$ gdw. für jedes $w \in \mathbf{L}(\mathcal{M}_1)$ gilt $w \in \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$

gdw. es gibt kein $w \in \mathbf{L}(\mathcal{M}_1)$ mit $w \notin \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$

gdw. es gibt kein $w \in \mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \cap (\Sigma^* \setminus \mathbf{L}(\mathcal{M}_2))$

gdw. $\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \cap (\Sigma^* \setminus \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)) = \emptyset$

gdw. $\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \cap \overline{\mathbf{L}(\mathcal{M}_2)} = \emptyset$

Lösen des Inklusionsproblems

Wie kann man $\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \subseteq \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$ testen?

Reduktion auf Leerheitsproblem:

$\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \subseteq \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$	gdw.	für jedes $w \in \mathbf{L}(\mathcal{M}_1)$ gilt $w \in \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$
	gdw.	es gibt kein $w \in \mathbf{L}(\mathcal{M}_1)$ mit $w \notin \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$
	gdw.	es gibt kein $w \in \mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \cap (\Sigma^* \setminus \mathbf{L}(\mathcal{M}_2))$
	gdw.	$\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \cap (\Sigma^* \setminus \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)) = \emptyset$
	gdw.	$\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \cap \overline{\mathbf{L}(\mathcal{M}_2)} = \emptyset$
	gdw.	$\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \cap \mathbf{L}\left(\overline{\mathcal{M}_2}\right) = \emptyset$

Lösen des Inklusionsproblems

Wie kann man $\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \subseteq \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$ testen?

Reduktion auf Leerheitsproblem:

$$
\begin{array}{lll}
\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \subseteq \mathbf{L}(\mathcal{M}_2) & \text{gdw.} & \text{für jedes } w \in \mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \text{ gilt } w \in \mathbf{L}(\mathcal{M}_2) \\
& \text{gdw.} & \text{es gibt kein } w \in \mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \text{ mit } w \notin \mathbf{L}(\mathcal{M}_2) \\
& \text{gdw.} & \text{es gibt kein } w \in \mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \cap (\Sigma^* \setminus \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)) \\
& \text{gdw.} & \mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \cap (\Sigma^* \setminus \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)) = \emptyset \\
& \text{gdw.} & \mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \cap \overline{\mathbf{L}(\mathcal{M}_2)} = \emptyset \\
& \text{gdw.} & \mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \cap \mathbf{L}\left(\overline{\mathcal{M}_2}\right) = \emptyset \\
& \text{gdw.} & \mathbf{L}\left(\mathcal{M}_1 \otimes \overline{\mathcal{M}_2}\right) = \emptyset
\end{array}
$$

$\rightsquigarrow$ kann effektiv überprüft werden

Komplexität des Inklusionsproblems

Wie aufwändig ist es, $\mathbf{L}\left(\mathcal{M}_1 \otimes \overline{\mathcal{M}_2}\right) = \emptyset$ zu testen?

- Komplementbildung: linear für DFAs,
  exponentiell für NFAs (Determinisierung nötig!)
- Produktautomat: polynomiell
- Leerheitstest: polynomiell

Komplexität des Inklusionsproblems

Wie aufwändig ist es, $\mathbf{L}\left(\mathcal{M}_1 \otimes \overline{\mathcal{M}_2}\right) = \emptyset$ zu testen?

- Komplementbildung: linear für DFAs,
  exponentiell für NFAs (Determinisierung nötig!)
- Produktautomat: polynomiell
- Leerheitstest: polynomiell

Satz: Für NFAs $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ kann $\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \subseteq \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$ ...

- in exponentieller Zeit entschieden werden;
- in polynomieller Zeit entschieden werden, wenn $\mathcal{M}_2$ ein DFA ist.

Komplexität des Inklusionsproblems

Wie aufwändig ist es, $\mathbf{L}\big(\mathcal{M}_1 \otimes \overline{\mathcal{M}_2}\big) = \emptyset$ zu testen?

- Komplementbildung: linear für DFAs,
  exponentiell für NFAs (Determinisierung nötig!)
- Produktautomat: polynomiell
- Leerheitstest: polynomiell

Satz: Für NFAs $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ kann $\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \subseteq \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$ ...

- in exponentieller Zeit entschieden werden;
- in polynomieller Zeit entschieden werden, wenn $\mathcal{M}_2$ ein DFA ist.

- Es ist bisher nicht bewiesen, dass es für NFAs keinen besseren Algorithmus gibt.
- Ergebnisse aus der Komplexitätstheorie legen das aber nahe.
  (Das Problem ist PSpace-vollständig.)
- Obwohl jedes bekannte Verfahren eine (im schlimmsten Fall) exponentielle Laufzeit hat, gibt es praktische Algorithmen, die in vielen Fällen deutlich besser sind als das obige.

Quiz: Inklusionsproblem für NFAs

Wir entscheiden $\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \subseteq \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$, indem wir das äquivalente $\mathbf{L}\big(\mathcal{M}_1 \otimes \overline{\mathcal{M}_2}\big) = \emptyset$ prüfen.

Quiz: Wir wollen $\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \subseteq \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$ für die beiden Automaten $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ testen. …

Das Äquivalenzproblem für DFA und NFA

Das Äquivalenzproblem für FAs über Alphabet Σ besteht darin, die folgende Funktion zu berechnen:

Eingabe: zwei FAs $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ über Alphabet Σ
Ausgabe: „ja“ wenn $\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) = \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$; andernfalls „nein“

Anwendungsbeispiel: Eingabefeld für E-Mail-Adressen, Systemmigration/-update

- alte Spezifikation $\mathcal{M}_{\text{alt}}$, neue Spezifikation $\mathcal{M}_{\text{neu}}$
- Äquivalenztest: Prüfe, ob die beiden Ausdrücke die exakt gleichen Adressen akzeptieren.

Anwendungsbeispiel: Anfrageoptimierung in Graphdatenbanken

- Graphdatenbanken erlauben die Suche nach Pfaden, die regulären Ausdrücken entsprechen.
- Einmal berechnete Ergebnisse werden zwischengespeichert (Cache).
- Äquivalenztest: Prüfe, ob eine neu eingehenden Anfrage äquivalent zu einer Anfrage im Cache ist.

Komplexität des Äquivalenzproblems

Das Äquivalenzproblem kann auf das Inklusionsproblem reduziert werden:

$$\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) = \mathbf{L}(\mathcal{M}_2) \text{ gdw. } \mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \subseteq \mathbf{L}(\mathcal{M}_2) \text{ und } \mathbf{L}(\mathcal{M}_2) \subseteq \mathbf{L}(\mathcal{M}_1).$$

Daraus ergibt sich eine obere Schranke der Komplexität:

Satz: Für NFAs $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ kann $\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) = \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$ ...

- in exponentieller Zeit entschieden werden;
- in polynomieller Zeit entschieden werden, wenn $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ DFAs sind.

Auch hier ist nicht bekannt, ob es effizientere Algorithmen geben könnte, aber es gilt als sehr unwahrscheinlich.

Das Wortproblem für reguläre Sprachen

Satz: Das Wortproblem für DFAs kann in polynomieller Zeit entschieden werden.

Das Wortproblem für reguläre Sprachen

Satz: Das Wortproblem für DFAs kann in polynomieller Zeit entschieden werden.

Beweis: Es genügt, den DFA für $|w|$ Schritte zu simulieren und zu prüfen, ob danach ein Endzustand erreicht ist. Die Berechnung von $\delta(q, \mathtt{a})$ ist in polynomieller Zeit möglich – die Details hängen davon ab, wie genau $\mathcal{M}$ in der Eingabe kodiert wurde. $\square$

Das Wortproblem für reguläre Sprachen

Satz: Das Wortproblem für DFAs kann in polynomieller Zeit entschieden werden.

Beweis: Es genügt, den DFA für $|w|$ Schritte zu simulieren und zu prüfen, ob danach ein Endzustand erreicht ist. Die Berechnung von $\delta(q, \mathtt{a})$ ist in polynomieller Zeit möglich – die Details hängen davon ab, wie genau $\mathcal{M}$ in der Eingabe kodiert wurde. $\square$

Satz: Das Wortproblem für reguläre Sprachen kann in linearer Zeit $O(|w|)$ entschieden werden.

Das Wortproblem für reguläre Sprachen

Satz: Das Wortproblem für DFAs kann in polynomieller Zeit entschieden werden.

Beweis: Es genügt, den DFA für $|w|$ Schritte zu simulieren und zu prüfen, ob danach ein Endzustand erreicht ist. Die Berechnung von $\delta(q, \mathsf{a})$ ist in polynomieller Zeit möglich – die Details hängen davon ab, wie genau $\mathcal{M}$ in der Eingabe kodiert wurde. $\square$

Satz: Das Wortproblem für reguläre Sprachen kann in linearer Zeit $O(|w|)$ entschieden werden.

Beweis: Man kann den DFA als gegebenen Bestandteil des Problems annehmen, der nicht Teil der Eingabe ist. Die Berechnung von $\delta(q, \mathsf{a})$ kann daher in konstanter Zeit erfolgen kann (die Zeit hängt vom Automaten ab, aber nicht von der Eingabe). Die Simulation benötigt daher insgesamt $|w|$ Rechenschritte. $\square$

Das Wortproblem für NFAs

Was tun, wenn ein NFA gegeben ist?

Das Wortproblem für NFAs

Was tun, wenn ein NFA gegeben ist?

Variante 1: NFA in DFA umwandeln (Potenzmengenkonstruktion), Wortproblem für DFA lösen

Das Wortproblem für NFAs

Was tun, wenn ein NFA gegeben ist?

Variante 1: NFA in DFA umwandeln (Potenzmengenkonstruktion), Wortproblem für DFA lösen
Exponentieller Algorithmus: Potenzmengen-DFA ist exponentiell groß

Das Wortproblem für NFAs

Was tun, wenn ein NFA gegeben ist?

Variante 1: NFA in DFA umwandeln (Potenzmengenkonstruktion), Wortproblem für DFA lösen
Exponentieller Algorithmus: Potenzmengen-DFA ist exponentiell groß

Variante 2: NFA direkt mit Zustandsmengen simulieren (vergleichbar „on-the-fly Version von Variante 1“)

Details: Variante 2

Eingabe: NFA $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F \rangle$ und Wort w
Ausgabe: Ist $w \in \mathbf{L}(\mathcal{M})$?

- Initialisiere $Z_0 := Q_0$
- Für jedes Symbol σ_i in $w = \sigma_1 \cdots \sigma_{|w|}$:
  Berechne $Z_i := \bigcup_{q \in Z_{i-1}} \delta(q, \sigma_i)$
- Für alle $q \in F$:
  Falls $q \in Z_{|w|}$: Das Ergebnis ist „ja".
- Falls kein $q \in F \cap Z_{|w|}$ gefunden wurde: Das Ergebnis ist „nein".

Alle Teilberechnungen können in polynomieller Zeit ausgeführt werden, sofern $\mathcal{M}$ „vernünftig" kodiert wird.

Das Wortproblem für NFAs

Was tun, wenn ein NFA gegeben ist?

Variante 1: NFA in DFA umwandeln (Potenzmengenkonstruktion), Wortproblem für DFA lösen
Exponentieller Algorithmus: Potenzmengen-DFA ist exponentiell groß

Variante 2: NFA direkt mit Zustandsmengen simulieren (vergleichbar „on-the-fly Version von Variante 1“)
Polynomieller Algorithmus: Zustandsmengen sind von linearer Größe; Berechnung der Nachfolgemenge als Vereinigung linear vieler δ-Ergebnismengen

Das Wortproblem für NFAs

Was tun, wenn ein NFA gegeben ist?

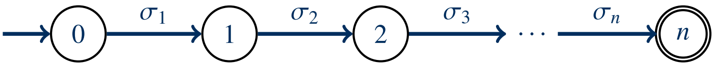
Variante 1: NFA in DFA umwandeln (Potenzmengenkonstruktion), Wortproblem für DFA lösen
Exponentieller Algorithmus: Potenzmengen-DFA ist exponentiell groß

Variante 2: NFA direkt mit Zustandsmengen simulieren (vergleichbar „on-the-fly Version von Variante 1“)
Polynomieller Algorithmus: Zustandsmengen sind von linearer Größe; Berechnung der Nachfolgemenge als Vereinigung linear vieler δ-Ergebnismengen

Variante 3: Konstruiere einen DFA $\mathcal{M}_w$ mit $\mathbf{L}(\mathcal{M}_w) = \{w\}$ und prüfe, ob $\mathbf{L}(\mathcal{M}) \cap \mathbf{L}(\mathcal{M}_w) \neq \emptyset$

Details: Variante 3

Der Automat $\mathcal{M}_w$ für $w = \sigma_1 \cdots \sigma_n$ ist leicht gefunden:



Eingabe: NFA $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F\rangle$ und Wort w
Ausgabe: Ist $w \in \mathbf{L}(\mathcal{M})$?

(1) Konstruiere $\mathcal{M}_w$

(2) Berechne Produktautomaten $\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}_w$

(3) Entscheide, ob $\mathbf{L}(\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}_w) \neq \emptyset$

Das Wortproblem für NFAs

Was tun, wenn ein NFA gegeben ist?

Variante 1: NFA in DFA umwandeln (Potenzmengenkonstruktion), Wortproblem für DFA lösen
Exponentieller Algorithmus: Potenzmengen-DFA ist exponentiell groß

Variante 2: NFA direkt mit Zustandsmengen simulieren (vergleichbar „on-the-fly Version von Variante 1“)
Polynomieller Algorithmus: Zustandsmengen sind von linearer Größe; Berechnung der Nachfolgemenge als Vereinigung linear vieler δ-Ergebnismengen

Variante 3: Konstruiere einen DFA $\mathcal{M}_w$ mit $\mathbf{L}(\mathcal{M}_w) = \{w\}$ und prüfe ob $\mathbf{L}(\mathcal{M}) \cap \mathbf{L}(\mathcal{M}_w) \neq \emptyset$
Polynomieller Algorithmus: $\mathcal{M}_w$ ist linear in $|w|$; Schnittmengen-DFA ist quadratisch groß; Leerheitstest ist polynomiell in dieser Größe

Wortproblem für NFAs – Komplexität

Variante 1: NFA in DFA umwandeln (Potenzmengenkonstruktion),
Wortproblem für DFA lösen

Variante 2: NFA direkt mit Zustandsmengen simulieren
(vergleichbar „on-the-fly Version von Variante 1“)

Variante 3: Konstruiere einen DFA $\mathcal{M}_w$ mit $\mathbf{L}(\mathcal{M}_w) = \{w\}$ und prüfe ob $\mathbf{L}(\mathcal{M}) \cap \mathbf{L}(\mathcal{M}_w) \neq \emptyset$

Mit Variante 2 und 3 erhalten wir:

Satz: Das Wortproblem für NFAs kann in polynomieller Zeit entschieden werden.

Weitere Probleme für Automaten

Das Endlichkeitsproblem für FAs über Alphabet Σ besteht darin, die folgende Funktion zu berechnen:

Eingabe: ein FA $\mathcal{M}$
Ausgabe: „ja“, wenn $\mathbf{L}(\mathcal{M})$ endlich ist; andernfalls „nein“

Weitere Probleme für Automaten

Das Endlichkeitsproblem für FAs über Alphabet Σ besteht darin, die folgende Funktion zu berechnen:

Eingabe: ein FA $\mathcal{M}$
Ausgabe: „ja“, wenn $\mathbf{L}(\mathcal{M})$ endlich ist; andernfalls „nein“

Idee (wie beim Pumping-Lemma): Unendliche Sprachen erfordern (mind. einen) Zyklus.
$\leadsto$ Suche nach Zyklen, die auf einem Pfad von einem Start- zu einem Endzustand liegen (polynomiell).

Weitere Probleme für Automaten

Das Endlichkeitsproblem für FAs über Alphabet Σ besteht darin, die folgende Funktion zu berechnen:

Eingabe: ein FA $\mathcal{M}$
Ausgabe: „ja“, wenn $\mathbf{L}(\mathcal{M})$ endlich ist; andernfalls „nein“

Idee (wie beim Pumping-Lemma): Unendliche Sprachen erfordern (mind. einen) Zyklus.
$\rightsquigarrow$ Suche nach Zyklen, die auf einem Pfad von einem Start- zu einem Endzustand liegen (polynomiell).

Das Universalitätsproblem für FAs über Alphabet Σ besteht darin, die folgende Funktion zu berechnen:

Eingabe: ein FA $\mathcal{M}$
Ausgabe: „ja“, wenn $\mathbf{L}(\mathcal{M}) = \Sigma^*$; andernfalls „nein“

Weitere Probleme für Automaten

Das Endlichkeitsproblem für FAs über Alphabet Σ besteht darin, die folgende Funktion zu berechnen:

Eingabe: ein FA $\mathcal{M}$
Ausgabe: „ja“, wenn $\mathbf{L}(\mathcal{M})$ endlich ist; andernfalls „nein“

Idee (wie beim Pumping-Lemma): Unendliche Sprachen erfordern (mind. einen) Zyklus.
$\leadsto$ Suche nach Zyklen, die auf einem Pfad von einem Start- zu einem Endzustand liegen (polynomiell).

Das Universalitätsproblem für FAs über Alphabet Σ besteht darin, die folgende Funktion zu berechnen:

Eingabe: ein FA $\mathcal{M}$
Ausgabe: „ja“, wenn $\mathbf{L}(\mathcal{M}) = \Sigma^*$; andernfalls „nein“

Komplement des Leerheitsproblems: $\mathbf{L}(\mathcal{M}) = \Sigma^*$ genau dann, wenn $\mathbf{L}\left(\overline{\mathcal{M}}\right) = \emptyset$.
$\leadsto$ Komplexität abhängig von FA-Komplementierung.

Zusammenfassung und Ausblick

Es gibt viele nichtreguläre Sprachen, was man mit verschiedenen Methoden beweisen kann (Myhill-Nerode, Abschlusseigenschaften, Pumping-Lemma).

$\{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \mid n \geq 0\}$ ist nicht regulär, „da FAs nicht zählen können".

Algorithmische Probleme zu Automaten sind Leerheit, Inklusion, Äquivalenz, Universalität, Endlichkeit und das Wortproblem.

Für DFAs können sie in polynomieller Zeit gelöst werden, für NFAs dagegen zum Teil nur in exponentieller Zeit.

Offene Fragen:

- Wir haben schon so viel über reguläre Sprachen gelernt – könnten wir das bitte noch einmal alles zusammenfassen?
- Und was ist mit kontextfreien Sprachen?