TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Informatik Institut für Theoretische Informatik, Lehrstuhl für Automatentheorie

Formale Systeme
Musterklausur 26.01.2017

Wintersemester 2016/17

Aufgabe 1

(6 Punkte)

Gegeben sei die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit

$V = \{S, A, B\},\ \Sigma = \{a, b\}$ und
$P = \{S \to ASB,\ S \to AB,\ AB \to BA,\ A \to a,\ B \to b\}$.

a) Von welchem maximalen Typ ist G? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Geben Sie vier Wörter $w_1, w_2, w_3, w_4 \in L(G)$ mit $|w_1| = |w_2| = |w_3| = |w_4| = 4$ an.

c) Beschreiben Sie die durch G erzeugte Sprache $L(G)$ in einer geeigneten Notation.

Aufgabe 2

(7 Punkte)

Gegeben sei das Wort $w = abac$ und die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit

$V = \{S, A, B, C, D\},\ \Sigma = \{a, b, c\}$ und
$P = \{S \to AB,\ A \to BA,\ A \to a, B \to AC,\ B \to BB,\ B \to b,$
$C \to c,\ D \to AB\}$.

a) Ist die Grammatik G in *Chomsky*-Normalform? Begründen Sie Ihre Antwort.

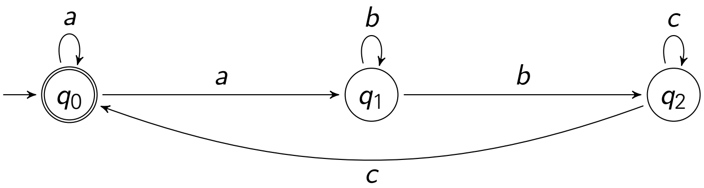
b) Entscheiden Sie mithilfe des Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus, ob $w \in L(G)$ gilt. Transformieren Sie, falls notwendig, G in *Chomsky*-Normalform.

c) Entfernen Sie in G, sofern vorhanden, nichtterminierende und nichterreichbare Symbole. Begründen Sie Ihr Vorgehen.

Aufgabe 3

(9 Punkte)

Gegeben sei der NFA $\mathcal{M} = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, \delta, \{q_0\}, \{q_0\})$ mit δ:



a) Berechnen Sie mithilfe des Arden-Lemmas einen regulären Ausdruck α mit $L(\alpha) = L(\mathcal{M})$.

b) Konstruieren Sie einen zu $\mathcal{M}$ äquivalenten DFA $\mathcal{M}'$. Verwenden Sie dazu die Potenzmengenkonstruktion aus der Vorlesung.

c) Entfernen Sie alle unerreichbaren Zustände aus $\mathcal{M}'$.

Aufgabe 4

(8 Punkte)

Gegeben sei die Sprache

$$L = \{a^n b^{2n} \mid n \geq 0\}.$$

a) Entwerfen Sie einen Kellerautomaten $\mathcal{M}$ mit $L(\mathcal{M}) = L$. Kommentieren Sie die Arbeitsweise von $\mathcal{M}$.

b) Geben Sie an, ob $\mathcal{M}$ ein deterministischer oder ein nichtdeterministischer Kellerautomat ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Geben Sie eine Grammatik G mit $L(G) = L$ an. Bestimmen Sie den maximalen Typ von G und begründen Sie diesen.

Aufgabe 5

(6 Punkte)

Gegeben seien die Sprachen

$$L_1 = \{a^n b^m c^n \mid n, m \geq 1\} \text{ und } L_2 = \{a^k b^l c^p \mid k, l, p \geq 1 \text{ und } k \neq p\}.$$

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen. Begründen Sie Ihre Antworten - dabei dürfen Sie den gesamten Stoff und alle Resultate der Vorlesung und Übung verwenden.

a) $L_1 \setminus L_2$ ist kontextfrei.

b) $L_1 \cap L_2$ ist regulär.

Aufgabe 6

(6 Punkte)

Um mithilfe des Pumping-Lemmas zu zeigen, dass eine Sprache L nicht regulär ist, zeigt man, dass für sie die Aussage des Pumping-Lemmas nicht gilt.
Zeigen Sie, dass die Sprache $L = \{a^i b a^i b \mid i \geq 1\}$ nicht regulär ist.

Aufgabe 7

(20 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind jeweils wahr oder nicht wahr? Begründen Sie Ihre Antworten – dabei dürfen Sie den gesamten Stoff und alle Resultate der Vorlesung und Übung verwenden.

a) Sei α ein regulärer Ausdruck, der den Kleene-Stern-Operator nicht verwendet. Dann beschreibt α eine endliche Sprache.

b) Jede Teilmenge einer nicht-regulären Sprache L ist nicht regulär.

c) Sei $\mathcal{M}$ ein Kellerautomat. Dann gibt es eine kontextfreie Grammatik G mit $L(\mathcal{M}) = L(G)$.

d) Sei L eine reguläre Sprache. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $x \in L$ mit $|x| \geq n$ und $x = uvw$, so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind: $|v| \geq 1$, $|uv| \geq n$ und für alle $i \geq 0$ gilt $uv^i w \in L$.

e) Es gilt $\emptyset^* = \{\varepsilon\}$.

f) Es gibt eine reguläre Sprache, für welche die Anzahl der Äquivalenzklassen der zugehörigen *Nerode*-Rechtskongruenz endlich ist.

g) Einband-Turingmaschinen sind weniger ausdrucksstark als Mehrband-Turingmaschinen.

h) Sei E eine Eigenschaft von Sprachen, die für manche Turing-erkennbare Sprachen gilt und für manche Turing-erkennbare Sprachen nicht gilt. Dann ist das folgende Problem unentscheidbar:

   - Eingabe: Turingmaschine $\mathcal{M}$
   - Ausgabe: Hat $L(\mathcal{M})$ die Eigenschaft E?

i) Zwei gegebene aussagenlogische Klauseln haben genau eine Resolvente.

j) Es gibt eine aussagenlogische Formel F, die sowohl in KNF wie auch in DNF ist.

Aufgabe 8

(14 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Formel

$$F := \neg b \vee \Big((\neg a \vee \neg c \vee d) \wedge (\neg d \vee (a \wedge \neg c)) \Big)$$

äquivalent zu einer Horn-Formel ist.

b) Nutzen Sie das Resolutionsverfahren, um zu zeigen, dass

$$\{ (\neg a \vee b), (\neg a \vee d), (\neg b \vee \neg d \vee c), (\neg d \vee \neg c \vee \neg a)\} \models \neg a.$$

c) Begründen Sie, warum das Resolutionsverfahren für Horn-Formeln immer in polynomieller Zeit terminiert.