Theoretische Informatik und Logik

6. Übungsblatt

Sommersemester 2021

Die folgenden Aufgaben werden nicht in den Übungen besprochen und dienen der Selbstkontrolle.

Aufgabe J

Zeigen Sie, dass NP unter Kleene-Stern abgeschlossen ist.

Aufgabe K

Wir betrachten das folgende Problem K: Gegeben sind zwei gerichtete Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ sowie eine Zahl $k \in \mathbb{N}$. Gefragt ist, ob es Teilmengen $V_1' \subseteq V_1$ und $V_2' \subseteq V_2$ gibt, so dass $|V_1'| = |V_2'| = k$ ist und es eine Bijektion $f\colon V_1' \to V_2'$ gibt, so dass gilt

$$(u, v) \in E_1 \iff (f(u), f(v)) \in E_2.$$

a) Zeigen Sie $K \in$ NP.

b) Zeigen Sie, dass K ein NP-hartes Problem ist. Zeigen Sie dafür, dass das Problem CLIQUE auf K in polynomieller Zeit reduzierbar ist.

Aufgabe 1

Wir betrachten das folgende Problem K: Gegeben eine aussagenlogische Formel φ mit n Variablen, gibt es eine erfüllende Belegung von φ, bei der mindestens die Hälfte aller in φ vorkommenden Variablen mit „true“ belegt sind?

a) Formalisieren Sie dieses Problem als Sprache und zeigen Sie, dass $K \in$ NP gilt.

b) Zeigen Sie, dass K ein NP-hartes Problem ist.

Aufgabe 2

Im folgenden *Solitaire*-Spiel haben wir ein Spielbrett der Größe $m \times m$ gegeben. Als Ausgangsposition liegt auf jeder der m^2 Positionen entweder ein blauer Stein, ein roter Stein, oder gar nichts. Das Spiel wird nun so gespielt, dass Steine vom Brett genommen werden bis in jeder Spalte nur noch Steine einer Farbe liegen, und in jeder Zeile mindestens ein Stein liegen bleibt. In diesem Fall ist das Spiel gewonnen. Es ist möglich, dass man ausgehend von einer Ausgangsposition das Spiel nicht gewinnen kann.

a) Formalisieren Sie das Problem, für eine gegebene Ausgangsposition im Solitaire-Spiel zu entscheiden, ob es möglich ist, das Spiel zu gewinnen, als ein Entscheidungsproblem SOLITAIRE.

b) Zeigen Sie, dass SOLITAIRE $\in$ NP gilt.

c) Zeigen Sie, dass SOLITAIRE ein NP-hartes Problem ist, indem Sie zeigen, dass 3SAT in polynomieller Zeit auf SOLITAIRE reduzierbar ist.

Aufgabe 3

Sei Σ ein Alphabet und $A, B \subseteq \Sigma^*$. Wir sagen, dass A auf B in *logarithmischen Platz reduzierbar ist*, und schreiben $A \leq_\ell B$, falls es eine Many-One-Reduktion von A nach B gibt, die in logarithmischen Platz berechenbar ist. Zeigen Sie: gilt $A \leq_\ell B$ und $B \leq_\ell C$, dann gilt auch $A \leq_\ell C$.

Aufgabe 4

Wir betrachten das Problem SET-SPLITTING, welches für eine gegebene endliche Menge S und eine Menge $C = \{C_1, \dots, C_k\}$ von Teilmengen von S fragt, ob die Elemente von S derart mit den Farben blau oder rot gefärbt werden können, so dass niemals alle Elemente einer Menge C_i die gleiche Farbe bekommen. Zeigen Sie, dass SET-SPLITTING ein NP-vollständiges Problem ist.