Theoretische Informatik und Logik – Repetitorium (M2X)

Sascha Klüppelholz

Algebraische und logische Grundlagen der Informatik

Institut für Theoretische Informatik

16.07.2018

M - Komplexität - Wahr oder Falsch?

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jedes $\mathrm{PS}\textsc{pace}$-harte Problem ist NP-hart.
2. Es gibt kein NP-hartes Problem, welches in $\mathrm{PS}\textsc{pace}$ liegt.
3. Jedes NP-vollständige Problem liegt in $\mathrm{PS}\textsc{pace}$.
4. Es gilt $\mathrm{NP} = \mathrm{PS}\textsc{pace}$, wenn es ein $\mathrm{PS}\textsc{pace}$-hartes Problem in NP gibt.
5. Wenn $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ gilt, dann gibt es kein NP-hartes Problem in P.
6. Sei **L** ein $\mathrm{PS}\textsc{pace}$-vollständiges Problem. Dann gilt **L** $\in \mathrm{P} \iff \mathrm{P} = \mathrm{PS}\textsc{pace}$.

M - Komplexität - Wahr oder Falsch?

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jedes $\mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$-harte Problem ist NP-hart.
2. Es gibt kein NP-hartes Problem, welches in $\mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$ liegt.
3. Jedes NP-vollständige Problem liegt in $\mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$.
4. Es gilt $\mathrm{NP} = \mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$, wenn es ein $\mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$-hartes Problem in NP gibt.
5. Wenn $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ gilt, dann gibt es kein NP-hartes Problem in P.
6. Sei **L** ein $\mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$-vollständiges Problem. Dann gilt **L** $\in \mathrm{P} \iff \mathrm{P} = \mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$.

Antwort: JA!

M - Komplexität - Wahr oder Falsch?

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jedes $\mathrm{PS}\textsc{pace}$-harte Problem ist NP-hart.
2. Es gibt kein NP-hartes Problem, welches in $\mathrm{PS}\textsc{pace}$ liegt.
3. Jedes NP-vollständige Problem liegt in $\mathrm{PS}\textsc{pace}$.
4. Es gilt $\mathrm{NP} = \mathrm{PS}\textsc{pace}$, wenn es ein $\mathrm{PS}\textsc{pace}$-hartes Problem in NP gibt.
5. Wenn $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ gilt, dann gibt es kein NP-hartes Problem in P.
6. Sei **L** ein $\mathrm{PS}\textsc{pace}$-vollständiges Problem. Dann gilt $\mathbf{L} \in \mathrm{P} \iff \mathrm{P} = \mathrm{PS}\textsc{pace}$.

Antwort: JA!

Sei **L** $\mathrm{PS}\textsc{pace}$-hartes Problem und $\mathbf{L}' \in \mathrm{NP}$

M - Komplexität - Wahr oder Falsch?

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jedes $\text{PS}\textsc{pace}$-harte Problem ist NP-hart.
2. Es gibt kein NP-hartes Problem, welches in $\text{PS}\textsc{pace}$ liegt.
3. Jedes NP-vollständige Problem liegt in $\text{PS}\textsc{pace}$.
4. Es gilt $\text{NP} = \text{PS}\textsc{pace}$, wenn es ein $\text{PS}\textsc{pace}$-hartes Problem in NP gibt.
5. Wenn $\text{P} \neq \text{NP}$ gilt, dann gibt es kein NP-hartes Problem in P.
6. Sei **L** ein $\text{PS}\textsc{pace}$-vollständiges Problem. Dann gilt $\mathbf{L} \in \text{P} \iff \text{P} = \text{PS}\textsc{pace}$.

Antwort: JA!

Sei **L** $\text{PS}\textsc{pace}$-hartes Problem und $\mathbf{L}' \in \text{NP}$

$\Rightarrow$ dann ist $\mathbf{L}' \in \text{PS}\textsc{pace}$ (wegen $\text{NP} \subseteq \text{PS}\textsc{pace}$)

M - Komplexität - Wahr oder Falsch?

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jedes $\mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$-harte Problem ist NP-hart.
2. Es gibt kein NP-hartes Problem, welches in $\mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$ liegt.
3. Jedes NP-vollständige Problem liegt in $\mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$.
4. Es gilt $\mathrm{NP} = \mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$, wenn es ein $\mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$-hartes Problem in NP gibt.
5. Wenn $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ gilt, dann gibt es kein NP-hartes Problem in P.
6. Sei **L** ein $\mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$-vollständiges Problem. Dann gilt $\mathbf{L} \in \mathrm{P} \iff \mathrm{P} = \mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$.

Antwort: JA!

Sei **L** $\mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$-hartes Problem und $\mathbf{L}' \in \mathrm{NP}$

$\Rightarrow$ dann ist $\mathbf{L}' \in \mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$ (wegen $\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$)

$\Rightarrow$ und damit $\mathbf{L}' \leqslant_p \mathbf{L}$

M - Komplexität - Wahr oder Falsch?

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jedes PSPACE-harte Problem ist NP-hart.
2. Es gibt kein NP-hartes Problem, welches in PSPACE liegt.
3. Jedes NP-vollständige Problem liegt in PSPACE.
4. Es gilt $\mathrm{NP} = \mathrm{PSPACE}$, wenn es ein PSPACE-hartes Problem in NP gibt.
5. Wenn $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ gilt, dann gibt es kein NP-hartes Problem in P.
6. Sei **L** ein PSPACE-vollständiges Problem. Dann gilt $\mathbf{L} \in \mathrm{P} \iff \mathrm{P} = \mathrm{PSPACE}$.

Antwort: JA!

Sei **L** PSPACE-hartes Problem und $\mathbf{L}' \in \mathrm{NP}$

$\Rightarrow$ dann ist $\mathbf{L}' \in \mathrm{PSPACE}$ (wegen $\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PSPACE}$)

$\Rightarrow$ und damit $\mathbf{L}' \leqslant_p \mathbf{L}$

$\Rightarrow$ also ist beliebiges Problem $\mathbf{L}' \in \mathrm{NP}$ in polynomieller Zeit auf **L** reduzierbar

M - Komplexität - Wahr oder Falsch?

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jedes $\mathrm{PS}\textsc{pace}$-harte Problem ist NP-hart.
2. Es gibt kein NP-hartes Problem, welches in $\mathrm{PS}\textsc{pace}$ liegt.
3. Jedes NP-vollständige Problem liegt in $\mathrm{PS}\textsc{pace}$.
4. Es gilt $\mathrm{NP} = \mathrm{PS}\textsc{pace}$, wenn es ein $\mathrm{PS}\textsc{pace}$-hartes Problem in NP gibt.
5. Wenn $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ gilt, dann gibt es kein NP-hartes Problem in P.
6. Sei **L** ein $\mathrm{PS}\textsc{pace}$-vollständiges Problem. Dann gilt $\mathbf{L} \in \mathrm{P} \iff \mathrm{P} = \mathrm{PS}\textsc{pace}$.

Antwort: JA!

Sei **L** $\mathrm{PS}\textsc{pace}$-hartes Problem und $\mathbf{L}' \in \mathrm{NP}$

$\Rightarrow$ dann ist $\mathbf{L}' \in \mathrm{PS}\textsc{pace}$ (wegen $\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PS}\textsc{pace}$)

$\Rightarrow$ und damit $\mathbf{L}' \leqslant_p \mathbf{L}$

$\Rightarrow$ also ist beliebiges Problem $\mathbf{L}' \in \mathrm{NP}$ in polynomieller Zeit auf **L** reduzierbar

$\Rightarrow$ **L** ist somit NP-hart.

M - Komplexität - Wahr oder Falsch?

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jedes $\mathrm{PS{\small PACE}}$-harte Problem ist NP-hart.
2. Es gibt kein NP-hartes Problem, welches in $\mathrm{PS{\small PACE}}$ liegt.
3. Jedes NP-vollständige Problem liegt in $\mathrm{PS{\small PACE}}$.
4. Es gilt $\mathrm{NP} = \mathrm{PS{\small PACE}}$, wenn es ein $\mathrm{PS{\small PACE}}$-hartes Problem in NP gibt.
5. Wenn $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ gilt, dann gibt es kein NP-hartes Problem in P.
6. Sei **L** ein $\mathrm{PS{\small PACE}}$-vollständiges Problem. Dann gilt **L** $\in \mathrm{P} \iff \mathrm{P} = \mathrm{PS{\small PACE}}$.

M - Komplexität - Wahr oder Falsch?

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jedes $\mathrm{PS{\small PACE}}$-harte Problem ist NP-hart.
2. Es gibt kein NP-hartes Problem, welches in $\mathrm{PS{\small PACE}}$ liegt.
3. Jedes NP-vollständige Problem liegt in $\mathrm{PS{\small PACE}}$.
4. Es gilt $\mathrm{NP} = \mathrm{PS{\small PACE}}$, wenn es ein $\mathrm{PS{\small PACE}}$-hartes Problem in NP gibt.
5. Wenn $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ gilt, dann gibt es kein NP-hartes Problem in P.
6. Sei **L** ein $\mathrm{PS{\small PACE}}$-vollständiges Problem. Dann gilt **L** $\in \mathrm{P} \iff \mathrm{P} = \mathrm{PS{\small PACE}}$.

Antwort: NEIN!

M - Komplexität - Wahr oder Falsch?

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jedes $\mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$-harte Problem ist NP-hart.
2. Es gibt kein NP-hartes Problem, welches in $\mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$ liegt.
3. Jedes NP-vollständige Problem liegt in $\mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$.
4. Es gilt $\mathrm{NP} = \mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$, wenn es ein $\mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$-hartes Problem in NP gibt.
5. Wenn $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ gilt, dann gibt es kein NP-hartes Problem in P.
6. Sei **L** ein $\mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$-vollständiges Problem. Dann gilt $\mathbf{L} \in \mathrm{P} \iff \mathrm{P} = \mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$.

Antwort: NEIN!

Alle NP-vollständigen Probleme liegen in NP und damit auch in $\mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$

(erneut wegen $\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$)

M - Komplexität - Wahr oder Falsch?

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jedes $\mathrm{P}\textsc{Space}$-harte Problem ist NP-hart.
2. Es gibt kein NP-hartes Problem, welches in $\mathrm{P}\textsc{Space}$ liegt.
3. Jedes NP-vollständige Problem liegt in $\mathrm{P}\textsc{Space}$.
4. Es gilt $\mathrm{NP} = \mathrm{P}\textsc{Space}$, wenn es ein $\mathrm{P}\textsc{Space}$-hartes Problem in NP gibt.
5. Wenn $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ gilt, dann gibt es kein NP-hartes Problem in P.
6. Sei **L** ein $\mathrm{P}\textsc{Space}$-vollständiges Problem. Dann gilt **L** $\in \mathrm{P} \iff \mathrm{P} = \mathrm{P}\textsc{Space}$.

M - Komplexität - Wahr oder Falsch?

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jedes $\mathrm{PS\textsc{pace}}$-harte Problem ist NP-hart.
2. Es gibt kein NP-hartes Problem, welches in $\mathrm{PS\textsc{pace}}$ liegt.
3. Jedes NP-vollständige Problem liegt in $\mathrm{PS\textsc{pace}}$.
4. Es gilt $\mathrm{NP} = \mathrm{PS\textsc{pace}}$, wenn es ein $\mathrm{PS\textsc{pace}}$-hartes Problem in NP gibt.
5. Wenn $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ gilt, dann gibt es kein NP-hartes Problem in P.
6. Sei **L** ein $\mathrm{PS\textsc{pace}}$-vollständiges Problem. Dann gilt **L** $\in \mathrm{P} \iff \mathrm{P} = \mathrm{PS\textsc{pace}}$.

Antwort: JA!

M - Komplexität - Wahr oder Falsch?

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jedes $\text{PS}\textsc{pace}$-harte Problem ist NP-hart.
2. Es gibt kein NP-hartes Problem, welches in $\text{PS}\textsc{pace}$ liegt.
3. Jedes NP-vollständige Problem liegt in $\text{PS}\textsc{pace}$.
4. Es gilt $\text{NP} = \text{PS}\textsc{pace}$, wenn es ein $\text{PS}\textsc{pace}$-hartes Problem in NP gibt.
5. Wenn $\text{P} \neq \text{NP}$ gilt, dann gibt es kein NP-hartes Problem in P.
6. Sei **L** ein $\text{PS}\textsc{pace}$-vollständiges Problem. Dann gilt **L** $\in \text{P} \iff \text{P} = \text{PS}\textsc{pace}$.

Antwort: JA!

Da alle NP-vollständigen Probleme in NP liegen und $\text{NP} \subseteq \text{PS}\textsc{pace}$ gilt.

M - Komplexität - Wahr oder Falsch?

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jedes $\mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$-harte Problem ist NP-hart.
2. Es gibt kein NP-hartes Problem, welches in $\mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$ liegt.
3. Jedes NP-vollständige Problem liegt in $\mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$.
4. Es gilt $\mathrm{NP} = \mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$, wenn es ein $\mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$-hartes Problem in NP gibt.
5. Wenn $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ gilt, dann gibt es kein NP-hartes Problem in P.
6. Sei **L** ein $\mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$-vollständiges Problem. Dann gilt **L** $\in \mathrm{P} \iff \mathrm{P} = \mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$.

M - Komplexität - Wahr oder Falsch?

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jedes $\mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$-harte Problem ist NP-hart.
2. Es gibt kein NP-hartes Problem, welches in $\mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$ liegt.
3. Jedes NP-vollständige Problem liegt in $\mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$.
4. Es gilt $\mathrm{NP} = \mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$, wenn es ein $\mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$-hartes Problem in NP gibt.
5. Wenn $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ gilt, dann gibt es kein NP-hartes Problem in P.
6. Sei **L** ein $\mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$-vollständiges Problem. Dann gilt **L** $\in \mathrm{P} \iff \mathrm{P} = \mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$.

Antwort: JA!

M - Komplexität - Wahr oder Falsch?

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jedes $\mathrm{PS}\textsc{pace}$-harte Problem ist NP-hart.
2. Es gibt kein NP-hartes Problem, welches in $\mathrm{PS}\textsc{pace}$ liegt.
3. Jedes NP-vollständige Problem liegt in $\mathrm{PS}\textsc{pace}$.
4. Es gilt $\mathrm{NP} = \mathrm{PS}\textsc{pace}$, wenn es ein $\mathrm{PS}\textsc{pace}$-hartes Problem in NP gibt.
5. Wenn $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ gilt, dann gibt es kein NP-hartes Problem in P.
6. Sei **L** ein $\mathrm{PS}\textsc{pace}$-vollständiges Problem. Dann gilt **L** $\in \mathrm{P} \iff \mathrm{P} = \mathrm{PS}\textsc{pace}$.

Antwort: JA!

Die Inklusion $\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PS}\textsc{pace}$ gilt stets.

M - Komplexität - Wahr oder Falsch?

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jedes PSPACE-harte Problem ist NP-hart.
2. Es gibt kein NP-hartes Problem, welches in PSPACE liegt.
3. Jedes NP-vollständige Problem liegt in PSPACE.
4. Es gilt $\text{NP} = \text{PSPACE}$, wenn es ein PSPACE-hartes Problem in NP gibt.
5. Wenn $\text{P} \neq \text{NP}$ gilt, dann gibt es kein NP-hartes Problem in P.
6. Sei **L** ein PSPACE-vollständiges Problem. Dann gilt $\mathbf{L} \in \text{P} \iff \text{P} = \text{PSPACE}$.

Antwort: JA!
Die Inklusion $\text{NP} \subseteq \text{PSPACE}$ gilt stets. Umgekehrt...
Angenommen, **L** ist ein PSPACE-hartes Problem in NP und sei $\mathbf{L}' \in \text{PSPACE}$.

$\Rightarrow$ Dann gilt $\mathbf{L}' \leqslant_p \mathbf{L}$

M - Komplexität - Wahr oder Falsch?

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jedes PSPACE-harte Problem ist NP-hart.
2. Es gibt kein NP-hartes Problem, welches in PSPACE liegt.
3. Jedes NP-vollständige Problem liegt in PSPACE.
4. Es gilt $\mathrm{NP} = \mathrm{PSPACE}$, wenn es ein PSPACE-hartes Problem in NP gibt.
5. Wenn $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ gilt, dann gibt es kein NP-hartes Problem in P.
6. Sei **L** ein PSPACE-vollständiges Problem. Dann gilt $\mathbf{L} \in \mathrm{P} \iff \mathrm{P} = \mathrm{PSPACE}$.

Antwort: JA!
Die Inklusion $\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PSPACE}$ gilt stets. Umgekehrt...
Angenommen, **L** ist ein PSPACE-hartes Problem in NP und sei $\mathbf{L}' \in \mathrm{PSPACE}$.

$\Rightarrow$ Dann gilt $\mathbf{L}' \leqslant_p \mathbf{L}$

$\Rightarrow$ $\mathbf{L}' \in \mathrm{NP}$ (wegen $\mathbf{L} \in \mathrm{NP}$ und Abgeschlossenheit von NP unter $\leqslant_p$)

M - Komplexität - Wahr oder Falsch?

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jedes PSPACE-harte Problem ist NP-hart.
2. Es gibt kein NP-hartes Problem, welches in PSPACE liegt.
3. Jedes NP-vollständige Problem liegt in PSPACE.
4. Es gilt $\mathrm{NP} = \mathrm{PSPACE}$, wenn es ein PSPACE-hartes Problem in NP gibt.
5. Wenn $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ gilt, dann gibt es kein NP-hartes Problem in P.
6. Sei **L** ein PSPACE-vollständiges Problem. Dann gilt $\mathbf{L} \in \mathrm{P} \iff \mathrm{P} = \mathrm{PSPACE}$.

Antwort: JA!
Die Inklusion $\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PSPACE}$ gilt stets. Umgekehrt...
Angenommen, **L** ist ein PSPACE-hartes Problem in NP und sei $\mathbf{L}' \in \mathrm{PSPACE}$.

$\Rightarrow$ Dann gilt $\mathbf{L}' \leqslant_p \mathbf{L}$

$\Rightarrow$ $\mathbf{L}' \in \mathrm{NP}$ (wegen $\mathbf{L} \in \mathrm{NP}$ und Abgeschlossenheit von NP unter $\leqslant_p$)

$\Rightarrow$ damit $\mathrm{NP} \supseteq \mathrm{PSPACE}$, und damit folgt die Behauptung.

M - Komplexität - Wahr oder Falsch?

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jedes PSPACE-harte Problem ist NP-hart.
2. Es gibt kein NP-hartes Problem, welches in PSPACE liegt.
3. Jedes NP-vollständige Problem liegt in PSPACE.
4. Es gilt $\text{NP} = \text{PSPACE}$, wenn es ein PSPACE-hartes Problem in NP gibt.
5. Wenn $\text{P} \neq \text{NP}$ gilt, dann gibt es kein NP-hartes Problem in P.
6. Sei **L** ein PSPACE-vollständiges Problem. Dann gilt $\mathbf{L} \in \text{P} \iff \text{P} = \text{PSPACE}$.

M - Komplexität - Wahr oder Falsch?

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jedes $\mathrm{PS}\textsc{pace}$-harte Problem ist NP-hart.
2. Es gibt kein NP-hartes Problem, welches in $\mathrm{PS}\textsc{pace}$ liegt.
3. Jedes NP-vollständige Problem liegt in $\mathrm{PS}\textsc{pace}$.
4. Es gilt $\mathrm{NP} = \mathrm{PS}\textsc{pace}$, wenn es ein $\mathrm{PS}\textsc{pace}$-hartes Problem in NP gibt.
5. Wenn $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ gilt, dann gibt es kein NP-hartes Problem in P.
6. Sei **L** ein $\mathrm{PS}\textsc{pace}$-vollständiges Problem. Dann gilt **L** $\in \mathrm{P} \iff \mathrm{P} = \mathrm{PS}\textsc{pace}$.

Antwort: JA!

M - Komplexität - Wahr oder Falsch?

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jedes $\mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$-harte Problem ist NP-hart.
2. Es gibt kein NP-hartes Problem, welches in $\mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$ liegt.
3. Jedes NP-vollständige Problem liegt in $\mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$.
4. Es gilt $\mathrm{NP} = \mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$, wenn es ein $\mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$-hartes Problem in NP gibt.
5. Wenn $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ gilt, dann gibt es kein NP-hartes Problem in P.
6. Sei **L** ein $\mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$-vollständiges Problem. Dann gilt **L** $\in \mathrm{P} \iff \mathrm{P} = \mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$.

Antwort: JA!

Denn **L** $\in \mathrm{P}$ und **L** ist NP-hart würde analog auch $\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{P}$ implizieren.

M - Komplexität - Wahr oder Falsch?

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jedes $\mathrm{PS{\small PACE}}$-harte Problem ist NP-hart.
2. Es gibt kein NP-hartes Problem, welches in $\mathrm{PS{\small PACE}}$ liegt.
3. Jedes NP-vollständige Problem liegt in $\mathrm{PS{\small PACE}}$.
4. Es gilt $\mathrm{NP} = \mathrm{PS{\small PACE}}$, wenn es ein $\mathrm{PS{\small PACE}}$-hartes Problem in NP gibt.
5. Wenn $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ gilt, dann gibt es kein NP-hartes Problem in P.
6. Sei **L** ein $\mathrm{PS{\small PACE}}$-vollständiges Problem. Dann gilt **L** $\in \mathrm{P} \iff \mathrm{P} = \mathrm{PS{\small PACE}}$.

M - Komplexität - Wahr oder Falsch?

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jedes $\mathrm{PS}\textsc{pace}$-harte Problem ist NP-hart.
2. Es gibt kein NP-hartes Problem, welches in $\mathrm{PS}\textsc{pace}$ liegt.
3. Jedes NP-vollständige Problem liegt in $\mathrm{PS}\textsc{pace}$.
4. Es gilt $\mathrm{NP} = \mathrm{PS}\textsc{pace}$, wenn es ein $\mathrm{PS}\textsc{pace}$-hartes Problem in NP gibt.
5. Wenn $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ gilt, dann gibt es kein NP-hartes Problem in P.
6. Sei **L** ein $\mathrm{PS}\textsc{pace}$-vollständiges Problem. Dann gilt **L** $\in \mathrm{P} \iff \mathrm{P} = \mathrm{PS}\textsc{pace}$.

Antwort: JA!

M - Komplexität - Wahr oder Falsch?

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jedes $\mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$-harte Problem ist NP-hart.
2. Es gibt kein NP-hartes Problem, welches in $\mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$ liegt.
3. Jedes NP-vollständige Problem liegt in $\mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$.
4. Es gilt $\mathrm{NP} = \mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$, wenn es ein $\mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$-hartes Problem in NP gibt.
5. Wenn $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ gilt, dann gibt es kein NP-hartes Problem in P.
6. Sei **L** ein $\mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$-vollständiges Problem. Dann gilt $\mathbf{L} \in \mathrm{P} \iff \mathrm{P} = \mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$.

Antwort: JA!

$\mathbf{L}' \leqslant_p \mathbf{L}$ für jedes $\mathbf{L}' \in \mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$

M - Komplexität - Wahr oder Falsch?

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jedes $\mathrm{PS}{\small\mathrm{PACE}}$-harte Problem ist NP-hart.
2. Es gibt kein NP-hartes Problem, welches in $\mathrm{PS}{\small\mathrm{PACE}}$ liegt.
3. Jedes NP-vollständige Problem liegt in $\mathrm{PS}{\small\mathrm{PACE}}$.
4. Es gilt $\mathrm{NP} = \mathrm{PS}{\small\mathrm{PACE}}$, wenn es ein $\mathrm{PS}{\small\mathrm{PACE}}$-hartes Problem in NP gibt.
5. Wenn $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ gilt, dann gibt es kein NP-hartes Problem in P.
6. Sei **L** ein $\mathrm{PS}{\small\mathrm{PACE}}$-vollständiges Problem. Dann gilt $\mathbf{L} \in \mathrm{P} \iff \mathrm{P} = \mathrm{PS}{\small\mathrm{PACE}}$.

Antwort: JA!

$\mathbf{L}' \leqslant_p \mathbf{L}$ für jedes $\mathbf{L}' \in \mathrm{PS}{\small\mathrm{PACE}}$

wegen $\mathbf{L} \in \mathrm{P}$ folgt $\mathbf{L}' \in \mathrm{P}$

M - Komplexität - Wahr oder Falsch?

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jedes $\mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$-harte Problem ist NP-hart.
2. Es gibt kein NP-hartes Problem, welches in $\mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$ liegt.
3. Jedes NP-vollständige Problem liegt in $\mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$.
4. Es gilt $\mathrm{NP} = \mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$, wenn es ein $\mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$-hartes Problem in NP gibt.
5. Wenn $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ gilt, dann gibt es kein NP-hartes Problem in P.
6. Sei **L** ein $\mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$-vollständiges Problem. Dann gilt $\mathbf{L} \in \mathrm{P} \iff \mathrm{P} = \mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$.

Antwort: JA!

$\mathbf{L}' \leqslant_p \mathbf{L}$ für jedes $\mathbf{L}' \in \mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$

wegen $\mathbf{L} \in \mathrm{P}$ folgt $\mathbf{L}' \in \mathrm{P}$

Damit ist $\mathrm{PS{\scriptsize PACE}} \subseteq \mathrm{P}$, also $\mathrm{PS{\scriptsize PACE}} = \mathrm{P}$.

M - Komplexität - Wahr oder Falsch?

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jedes $\mathrm{PS\small{PACE}}$-harte Problem ist NP-hart.
2. Es gibt kein NP-hartes Problem, welches in $\mathrm{PS\small{PACE}}$ liegt.
3. Jedes NP-vollständige Problem liegt in $\mathrm{PS\small{PACE}}$.
4. Es gilt $\mathrm{NP} = \mathrm{PS\small{PACE}}$, wenn es ein $\mathrm{PS\small{PACE}}$-hartes Problem in NP gibt.
5. Wenn $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ gilt, dann gibt es kein NP-hartes Problem in P.
6. Sei **L** ein $\mathrm{PS\small{PACE}}$-vollständiges Problem. Dann gilt $\mathbf{L} \in \mathrm{P} \iff \mathrm{P} = \mathrm{PS\small{PACE}}$.

Antwort: JA!

$\mathbf{L}' \leqslant_p \mathbf{L}$ für jedes $\mathbf{L}' \in \mathrm{PS\small{PACE}}$

wegen $\mathbf{L} \in \mathrm{P}$ folgt $\mathbf{L}' \in \mathrm{P}$

Damit ist $\mathrm{PS\small{PACE}} \subseteq \mathrm{P}$, also $\mathrm{PS\small{PACE}} = \mathrm{P}$.

Umgekehrt gilt $\mathbf{L} \in \mathrm{PS\small{PACE}} = \mathrm{P}$.

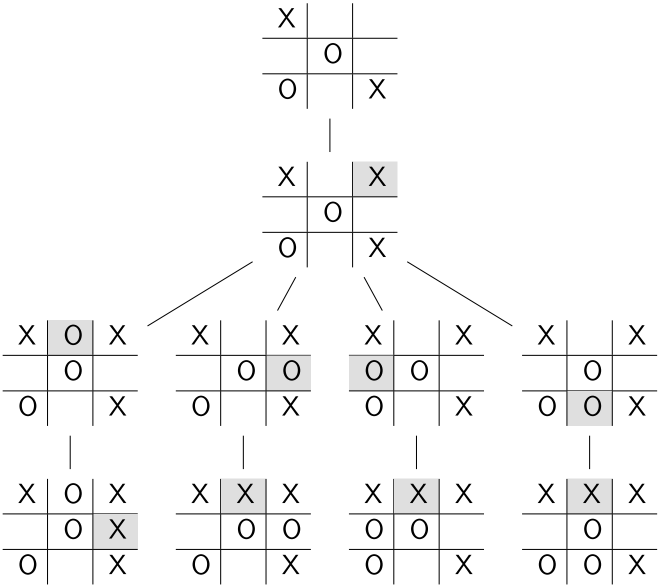
N - Partielle Gewinnstrategie Tic-Tac-Toe

Wir betrachten folgende Position im Tic-Tac-Toe:

X		
	O	
O		X

Angenommen, Spieler X ist am Zug. Beschreiben Sie eine Gewinnstrategie für X.

N - Partielle Gewinnstrategie Tic-Tac-Toe



O - PSPACE-Vollständigkeit unter Komplement

Zeigen Sie, dass für jedes PSPACE-vollständige Problem **L** auch das Komplement $\overline{\mathbf{L}}$ ein PSPACE-vollständiges Problem ist.

O - $\textsc{PSpace}$-Vollständigkeit unter Komplement

Zeigen Sie, dass für jedes $\textsc{PSpace}$-vollständige Problem $\mathbf{L}$ auch das Komplement $\overline{\mathbf{L}}$ ein $\textsc{PSpace}$-vollständiges Problem ist.

Es sei $\mathbf{H} \in \textsc{PSpace}$. Wir zeigen, dass $\mathbf{H} \leqslant_p \overline{\mathbf{L}}$ gilt:

O - $\textsc{PSpace}$-Vollständigkeit unter Komplement

Zeigen Sie, dass für jedes $\textsc{PSpace}$-vollständige Problem **L** auch das Komplement $\overline{\mathbf{L}}$ ein $\textsc{PSpace}$-vollständiges Problem ist.

Es sei $\mathbf{H} \in \textsc{PSpace}$. Wir zeigen, dass $\mathbf{H} \leqslant_p \overline{\mathbf{L}}$ gilt:

da $\mathbf{H} \in \textsc{PSpace}$, gilt auch $\overline{\mathbf{H}} \in \textsc{PSpace}$

O - $\textsc{PSpace}$-Vollständigkeit unter Komplement

Zeigen Sie, dass für jedes $\textsc{PSpace}$-vollständige Problem **L** auch das Komplement $\overline{\mathbf{L}}$ ein $\textsc{PSpace}$-vollständiges Problem ist.

Es sei $\mathbf{H} \in \textsc{PSpace}$. Wir zeigen, dass $\mathbf{H} \leqslant_p \overline{\mathbf{L}}$ gilt:

da $\mathbf{H} \in \textsc{PSpace}$, gilt auch $\overline{\mathbf{H}} \in \textsc{PSpace}$

damit ist $\overline{\mathbf{H}} \leqslant_p \mathbf{L}$, da **L** $\textsc{PSpace}$-vollständig ist

O - $\textsc{PSpace}$-Vollständigkeit unter Komplement

Zeigen Sie, dass für jedes $\textsc{PSpace}$-vollständige Problem **L** auch das Komplement $\overline{\mathbf{L}}$ ein $\textsc{PSpace}$-vollständiges Problem ist.

Es sei $\mathbf{H} \in \textsc{PSpace}$. Wir zeigen, dass $\mathbf{H} \leqslant_{\mathrm{p}} \overline{\mathbf{L}}$ gilt:

- da $\mathbf{H} \in \textsc{PSpace}$, gilt auch $\overline{\mathbf{H}} \in \textsc{PSpace}$
- damit ist $\overline{\mathbf{H}} \leqslant_{\mathrm{p}} \mathbf{L}$, da **L** $\textsc{PSpace}$-vollständig ist
- schließlich folgt $\mathbf{H} \leqslant_{\mathrm{p}} \overline{\mathbf{L}}$

O - $\textsc{PSpace}$-Vollständigkeit unter Komplement

Zeigen Sie, dass für jedes $\textsc{PSpace}$-vollständige Problem $\mathbf{L}$ auch das Komplement $\overline{\mathbf{L}}$ ein $\textsc{PSpace}$-vollständiges Problem ist.

Es sei $\mathbf{H} \in \textsc{PSpace}$. Wir zeigen, dass $\mathbf{H} \leqslant_p \overline{\mathbf{L}}$ gilt:

- da $\mathbf{H} \in \textsc{PSpace}$, gilt auch $\overline{\mathbf{H}} \in \textsc{PSpace}$
- damit ist $\overline{\mathbf{H}} \leqslant_p \mathbf{L}$, da $\mathbf{L}$ $\textsc{PSpace}$-vollständig ist
- schließlich folgt $\mathbf{H} \leqslant_p \overline{\mathbf{L}}$

Also ist $\overline{\mathbf{L}}$ $\textsc{PSpace}$-hart.

O - $\textsc{PSpace}$-Vollständigkeit unter Komplement

Zeigen Sie, dass für jedes $\textsc{PSpace}$-vollständige Problem **L** auch das Komplement $\overline{\mathbf{L}}$ ein $\textsc{PSpace}$-vollständiges Problem ist.

Es sei $\mathbf{H} \in \textsc{PSpace}$. Wir zeigen, dass $\mathbf{H} \leqslant_p \overline{\mathbf{L}}$ gilt:

da $\mathbf{H} \in \textsc{PSpace}$, gilt auch $\overline{\mathbf{H}} \in \textsc{PSpace}$

damit ist $\overline{\mathbf{H}} \leqslant_p \mathbf{L}$, da **L** $\textsc{PSpace}$-vollständig ist

schließlich folgt $\mathbf{H} \leqslant_p \overline{\mathbf{L}}$

Also ist $\overline{\mathbf{L}}$ $\textsc{PSpace}$-hart.

Da aber aus $\mathbf{L} \in \textsc{PSpace}$ auch $\overline{\mathbf{L}} \in \textsc{PSpace}$ folgt, dass $\overline{\mathbf{L}}$ auch $\textsc{PSpace}$-vollständig.

P - Konsequenz aus $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$

Zeigen Sie: ist $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$, dann sind alle Sprachen **L** $\in \mathrm{P} \setminus \{\varnothing, \Sigma^*\}$ NP-vollständig.

P - Konsequenz aus $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$

Zeigen Sie: ist $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$, dann sind alle Sprachen $\mathbf{L} \in \mathrm{P} \setminus \{\varnothing, \Sigma^*\}$ NP-vollständig.

Sei $\mathbf{L} \in \mathrm{P} \setminus \{\varnothing, \Sigma^*\}$ und $\mathbf{K} \in \mathrm{NP}$. Es genügt zu zeigen, dass $\mathbf{K} \leqslant_\mathsf{p} \mathbf{L}$:

P - Konsequenz aus $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$

Zeigen Sie: ist $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$, dann sind alle Sprachen $\mathbf{L} \in \mathrm{P} \setminus \{\varnothing, \Sigma^*\}$ NP-vollständig.

Sei $\mathbf{L} \in \mathrm{P} \setminus \{\varnothing, \Sigma^*\}$ und $\mathbf{K} \in \mathrm{NP}$. Es genügt zu zeigen, dass $\mathbf{K} \leqslant_{\mathsf{p}} \mathbf{L}$:

Seien dazu $x_0 \in \overline{\mathbf{L}}$ und $x_1 \in \mathbf{L}$. Wegen $\mathbf{K} \in \mathrm{NP} = \mathrm{P}$ ist die Abbildung

$$f(w) := \begin{cases} x_0 & \text{falls } w \notin \mathbf{K} \\ x_1 & \text{falls } w \in \mathbf{K} \end{cases}$$

eine polynomiell zeitberechenbare Funktion, so dass

$$w \in \mathbf{K} \quad \Longleftrightarrow \quad f(w) \in \mathbf{L}$$

P - Konsequenz aus $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$

Zeigen Sie: ist $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$, dann sind alle Sprachen $\mathbf{L} \in \mathrm{P} \setminus \{\varnothing, \Sigma^*\}$ NP-vollständig.

Sei $\mathbf{L} \in \mathrm{P} \setminus \{\varnothing, \Sigma^*\}$ und $\mathbf{K} \in \mathrm{NP}$. Es genügt zu zeigen, dass $\mathbf{K} \leqslant_{\mathsf{p}} \mathbf{L}$:

Seien dazu $x_0 \in \overline{\mathbf{L}}$ und $x_1 \in \mathbf{L}$. Wegen $\mathbf{K} \in \mathrm{NP} = \mathrm{P}$ ist die Abbildung

$$f(w) := \begin{cases} x_0 & \text{falls } w \notin \mathbf{K} \\ x_1 & \text{falls } w \in \mathbf{K} \end{cases}$$

eine polynomiell zeitberechenbare Funktion, so dass

$$w \in \mathbf{K} \quad \Longleftrightarrow \quad f(w) \in \mathbf{L}$$

Damit ist aber f eine Many-One-Reduktion von $\mathbf{K}$ auf $\mathbf{L}$.

P - Konsequenz aus $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$

Zeigen Sie: ist $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$, dann sind alle Sprachen $\mathbf{L} \in \mathrm{P} \setminus \{\varnothing, \Sigma^*\}$ NP-vollständig.

Sei $\mathbf{L} \in \mathrm{P} \setminus \{\varnothing, \Sigma^*\}$ und $\mathbf{K} \in \mathrm{NP}$. Es genügt zu zeigen, dass $\mathbf{K} \leqslant_{\mathsf{p}} \mathbf{L}$:

Seien dazu $x_0 \in \overline{\mathbf{L}}$ und $x_1 \in \mathbf{L}$. Wegen $\mathbf{K} \in \mathrm{NP} = \mathrm{P}$ ist die Abbildung

$$f(w) := \begin{cases} x_0 & \text{falls } w \notin \mathbf{K} \\ x_1 & \text{falls } w \in \mathbf{K} \end{cases}$$

eine polynomiell zeitberechenbare Funktion, so dass

$$w \in \mathbf{K} \iff f(w) \in \mathbf{L}$$

Damit ist aber f eine Many-One-Reduktion von $\mathbf{K}$ auf $\mathbf{L}$.

Somit ist $\mathbf{L}$ NP-vollständig.

Q - Prädikatenlogik erster Stufe / First Order Logic (FOL)

Geben Sie für die Formel

$$F = \forall x. \exists y. (p(c_1, z) \wedge (q(x, c_2, z) \vee p(c_2, y))),$$

wobei c_1, c_2 Konstanten sind, folgendes an:

1. die Menge aller Teilformeln
2. die Menge aller Terme
3. die Menge aller Variablen mit Unterscheidung freier und gebundener Variablen
4. ein Interpretation $\mathcal{I}$ und eine Zuweisung $\mathcal{Z}$ für $\mathcal{I}$, so dass $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models F$

Q - Prädikatenlogik erster Stufe / First Order Logic (FOL)

Geben Sie für die Formel

$$F = \forall x.\exists y.(p(c_1, z) \wedge (q(x, c_2, z) \vee p(c_2, y))),$$

wobei c_1, c_2 Konstanten sind, folgendes an:

1. die Menge aller Teilformeln
2. die Menge aller Terme
3. die Menge aller Variablen mit Unterscheidung freier und gebundener Variablen
4. ein Interpretation $\mathcal{I}$ und eine Zuweisung $\mathcal{Z}$ für $\mathcal{I}$, so dass $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models F$

Teilformeln: F und $\exists y.(p(c_1, z) \wedge (q(x, c_2, z) \vee p(c_2, y)))$ sowie

$p(c_1, z) \wedge (q(x, c_2, z) \vee p(c_2, y))$

$p(c_1, z)$

$q(x, c_2, z) \vee p(c_2, y)$

$q(x, c_2, z)$

$p(c_2, y)$

Q - Prädikatenlogik erster Stufe / First Order Logic (FOL)

Geben Sie für die Formel

$$F = \forall x . \exists y . (p(c_1, z) \wedge (q(x, c_2, z) \vee p(c_2, y))),$$

wobei c_1, c_2 Konstanten sind, folgendes an:

1. die Menge aller Teilformeln
2. die Menge aller Terme
3. die Menge aller Variablen mit Unterscheidung freier und gebundener Variablen
4. ein Interpretation $\mathfrak{I}$ und eine Zuweisung $\mathfrak{Z}$ für $\mathfrak{I}$, so dass $\mathfrak{I}, \mathfrak{Z} \models F$

Terme sind hier nur Variablen und Konstanten, da keine weiteren Funktionssymbole vorhanden sind. Also: c_1, z, x, c_2, y.

Q - Prädikatenlogik erster Stufe / First Order Logic (FOL)

Geben Sie für die Formel

$$F = \forall x . \exists y . (p(c_1, z) \wedge (q(x, c_2, z) \vee p(c_2, y))),$$

wobei c_1, c_2 Konstanten sind, folgendes an:

1. die Menge aller Teilformeln
2. die Menge aller Terme
3. die Menge aller Variablen mit Unterscheidung freier und gebundener Variablen
4. ein Interpretation $\mathcal{I}$ und eine Zuweisung $\mathcal{Z}$ für $\mathcal{I}$, so dass $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models F$

Gebundene Variablen: x, y, freie Variablen: z.

Q - Prädikatenlogik erster Stufe / First Order Logic (FOL)

Geben Sie für die Formel

$$F = \forall x.\exists y.(p(c_1, z) \wedge (q(x, c_2, z) \vee p(c_2, y))),$$

wobei c_1, c_2 Konstanten sind, folgendes an:

1. die Menge aller Teilformeln
2. die Menge aller Terme
3. die Menge aller Variablen mit Unterscheidung freier und gebundener Variablen
4. ein Interpretation $\mathcal{I}$ und eine Zuweisung $\mathcal{Z}$ für $\mathcal{I}$, so dass $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models F$

$\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}})$ mit $\Delta^{\mathcal{I}} = \{a\}$, $c_1^{\mathcal{I}} = c_2^{\mathcal{I}} = a$, $p^{\mathcal{I}} = \{(a, a)\}$, $q^{\mathcal{I}} = \{(a, a, a)\}$, $\mathcal{Z}(z) = a$.

R - Ist doch logisch... oder?

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

1. Es gilt $\{F\} \models G$ genau dann, wenn $F \to G$ allgemeingültig ist.
2. Es gilt $\{F_1, \ldots, F_k\} \models G$ genau dann, wenn $\bigwedge_{i=1}^{k} F_i \to G$ allgemeingültig ist.

R - Ist doch logisch... oder?

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

1. Es gilt $\{F\} \models G$ genau dann, wenn $F \rightarrow G$ allgemeingültig ist.
2. Es gilt $\{F_1, \ldots, F_k\} \models G$ genau dann, wenn $\bigwedge_{i=1}^{k} F_i \rightarrow G$ allgemeingültig ist.

1. Zu zeigen $\{F\} \models G \iff \emptyset \models F \rightarrow G$.

R - Ist doch logisch... oder?

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

1. Es gilt $\{F\} \models G$ genau dann, wenn $F \to G$ allgemeingültig ist.
2. Es gilt $\{F_1, \ldots, F_k\} \models G$ genau dann, wenn $\bigwedge_{i=1}^{k} F_i \to G$ allgemeingültig ist.

1. Zu zeigen $\{F\} \models G \iff \varnothing \models F \to G$.

   "$\Rightarrow$": Sei $\mathcal{I}$ eine Interpretation mit $\mathcal{I} \models F$. Dann gilt wegen $\{F\} \models G$ auch $\mathcal{I} \models G$

R - Ist doch logisch... oder?

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

1. Es gilt $\{F\} \models G$ genau dann, wenn $F \to G$ allgemeingültig ist.
2. Es gilt $\{F_1, \dots, F_k\} \models G$ genau dann, wenn $\bigwedge_{i=1}^k F_i \to G$ allgemeingültig ist.

1. Zu zeigen $\{F\} \models G \iff \varnothing \models F \to G$.

   "$\Rightarrow$": Sei $\mathcal{I}$ eine Interpretation mit $\mathcal{I} \models F$. Dann gilt wegen $\{F\} \models G$ auch $\mathcal{I} \models G$ und damit auch $\mathcal{I} \models F \to G$.

R - Ist doch logisch... oder?

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

1. Es gilt $\{F\} \models G$ genau dann, wenn $F \rightarrow G$ allgemeingültig ist.
2. Es gilt $\{F_1, \ldots, F_k\} \models G$ genau dann, wenn $\bigwedge_{i=1}^{k} F_i \rightarrow G$ allgemeingültig ist.

1. Zu zeigen $\{F\} \models G \iff \varnothing \models F \rightarrow G$.

   "$\Rightarrow$": Sei $\mathcal{I}$ eine Interpretation mit $\mathcal{I} \models F$. Dann gilt wegen $\{F\} \models G$ auch $\mathcal{I} \models G$ und damit auch $\mathcal{I} \models F \rightarrow G$. Da $\mathcal{I}$ beliebig gewählt, folgt $\varnothing \models F \rightarrow G$.

R - Ist doch logisch... oder?

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

1. Es gilt $\{F\} \models G$ genau dann, wenn $F \rightarrow G$ allgemeingültig ist.
2. Es gilt $\{F_1, \ldots, F_k\} \models G$ genau dann, wenn $\bigwedge_{i=1}^{k} F_i \rightarrow G$ allgemeingültig ist.

1. Zu zeigen $\{F\} \models G \iff \varnothing \models F \rightarrow G$.

   "$\Rightarrow$": Sei $\mathcal{I}$ eine Interpretation mit $\mathcal{I} \models F$. Dann gilt wegen $\{F\} \models G$ auch $\mathcal{I} \models G$ und damit auch $\mathcal{I} \models F \rightarrow G$. Da $\mathcal{I}$ beliebig gewählt, folgt $\varnothing \models F \rightarrow G$.

   "$\Leftarrow$": Sei $\mathcal{I}$ eine Interpretation mit $\mathcal{I} \models \{F\}$. Dann gilt wegen $\varnothing \models F \rightarrow G$ auch $\mathcal{I} \models G$.

R - Ist doch logisch... oder?

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

1. Es gilt $\{F\} \models G$ genau dann, wenn $F \rightarrow G$ allgemeingültig ist.
2. Es gilt $\{F_1, \ldots, F_k\} \models G$ genau dann, wenn $\bigwedge_{i=1}^{k} F_i \rightarrow G$ allgemeingültig ist.

1. Zu zeigen $\{F\} \models G \iff \varnothing \models F \rightarrow G$.

"$\Rightarrow$": Sei $\mathcal{I}$ eine Interpretation mit $\mathcal{I} \models F$. Dann gilt wegen $\{F\} \models G$ auch $\mathcal{I} \models G$ und damit auch $\mathcal{I} \models F \rightarrow G$. Da $\mathcal{I}$ beliebig gewählt, folgt $\varnothing \models F \rightarrow G$.

"$\Leftarrow$": Sei $\mathcal{I}$ eine Interpretation mit $\mathcal{I} \models \{F\}$. Dann gilt wegen $\varnothing \models F \rightarrow G$ auch $\mathcal{I} \models G$. Also gilt $\{F\} \models G$.

R - Ist doch logisch... oder?

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

1. Es gilt $\{F\} \models G$ genau dann, wenn $F \to G$ allgemeingültig ist.
2. Es gilt $\{F_1, \ldots, F_k\} \models G$ genau dann, wenn $\bigwedge_{i=1}^{k} F_i \to G$ allgemeingültig ist.

1. Zu zeigen $\{F\} \models G \iff \varnothing \models F \to G$.

   "$\Rightarrow$": Sei $\mathcal{I}$ eine Interpretation mit $\mathcal{I} \models F$. Dann gilt wegen $\{F\} \models G$ auch $\mathcal{I} \models G$ und damit auch $\mathcal{I} \models F \to G$. Da $\mathcal{I}$ beliebig gewählt, folgt $\varnothing \models F \to G$.

   "$\Leftarrow$": Sei $\mathcal{I}$ eine Interpretation mit $\mathcal{I} \models \{F\}$. Dann gilt wegen $\varnothing \models F \to G$ auch $\mathcal{I} \models G$. Also gilt $\{F\} \models G$.

2. analog.

S - Semantische Äquivalenz in FOL

Seien F, G Formeln und x eine Variable. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\exists x.(F \rightarrow G) \equiv \forall x.F \rightarrow \exists x.G.$$

S - Semantische Äquivalenz in FOL

Seien F, G Formeln und x eine Variable. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\exists x.(F \to G) \equiv \forall x.F \to \exists x.G.$$

$\Rightarrow$: Sei $\mathcal{I} \models \exists x.(F \to G)$. Dann gibt es $a \in \Delta^{\mathcal{I}}$ mit $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models F \to G$.

S - Semantische Äquivalenz in FOL

Seien F, G Formeln und x eine Variable. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\exists x.(F \rightarrow G) \equiv \forall x.F \rightarrow \exists x.G.$$

$\Rightarrow$: Sei $\mathcal{I} \models \exists x.(F \rightarrow G)$. Dann gibt es $a \in \Delta^{\mathcal{I}}$ mit $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models F \rightarrow G$.
Gilt nun $\mathcal{I} \models \forall x.F$, dann auch insbesondere $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models F$.

S - Semantische Äquivalenz in FOL

Seien F, G Formeln und x eine Variable. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\exists x.(F \to G) \equiv \forall x.F \to \exists x.G.$$

$\Rightarrow$: Sei $\mathcal{I} \models \exists x.(F \to G)$. Dann gibt es $a \in \Delta^{\mathcal{I}}$ mit $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models F \to G$.
Gilt nun $\mathcal{I} \models \forall x.F$, dann auch insbesondere $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models F$.
Also auch $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models G$ und $\mathcal{I} \models \exists x.G$.

S - Semantische Äquivalenz in FOL

Seien F, G Formeln und x eine Variable. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\exists x.(F \rightarrow G) \equiv \forall x.F \rightarrow \exists x.G.$$

$\Rightarrow$: Sei $\mathcal{I} \models \exists x.(F \rightarrow G)$. Dann gibt es $a \in \Delta^{\mathcal{I}}$ mit $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models F \rightarrow G$.
Gilt nun $\mathcal{I} \models \forall x.F$, dann auch insbesondere $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models F$.
Also auch $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models G$ und $\mathcal{I} \models \exists x.G$.
Zusammengenommen erhalten wir so $\mathcal{I} \models \forall x.F \rightarrow \exists x.G$.

S - Semantische Äquivalenz in FOL

Seien F, G Formeln und x eine Variable. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\exists x.(F \rightarrow G) \equiv \forall x.F \rightarrow \exists x.G.$$

$\Rightarrow$: Sei $\mathcal{I} \models \exists x.(F \rightarrow G)$. Dann gibt es $a \in \Delta^{\mathcal{I}}$ mit $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models F \rightarrow G$.
Gilt nun $\mathcal{I} \models \forall x.F$, dann auch insbesondere $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models F$.
Also auch $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models G$ und $\mathcal{I} \models \exists x.G$.
Zusammengenommen erhalten wir so $\mathcal{I} \models \forall x.F \rightarrow \exists x.G$.

$\Leftarrow$: Sei nun $\mathcal{I} \models (\forall x.F) \rightarrow (\exists x.G)$ und angenommen $\mathcal{I} \not\models \exists x.(F \rightarrow G)$.
Dann gilt für alle $a \in \Delta^{\mathcal{I}}$ auch $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models F$ und $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \not\models G$.

S - Semantische Äquivalenz in FOL

Seien F, G Formeln und x eine Variable. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\exists x.(F \to G) \equiv \forall x.F \to \exists x.G.$$

$\Rightarrow$: Sei $\mathcal{I} \models \exists x.(F \to G)$. Dann gibt es $a \in \Delta^{\mathcal{I}}$ mit $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models F \to G$.
Gilt nun $\mathcal{I} \models \forall x.F$, dann auch insbesondere $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models F$.
Also auch $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models G$ und $\mathcal{I} \models \exists x.G$.
Zusammengenommen erhalten wir so $\mathcal{I} \models \forall x.F \to \exists x.G$.

$\Leftarrow$: Sei nun $\mathcal{I} \models (\forall x.F) \to (\exists x.G)$ und angenommen $\mathcal{I} \not\models \exists x.(F \to G)$.
Dann gilt für alle $a \in \Delta^{\mathcal{I}}$ auch $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models F$ und $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \not\models G$.
m.a.W. $\mathcal{I} \models \forall x.(F \land \neg G) \equiv \forall x.F \land \forall x.\neg G$

S - Semantische Äquivalenz in FOL

Seien F, G Formeln und x eine Variable. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\exists x.(F \to G) \equiv \forall x.F \to \exists x.G.$$

$\Rightarrow$: Sei $\mathcal{I} \models \exists x.(F \to G)$. Dann gibt es $a \in \Delta^{\mathcal{I}}$ mit $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models F \to G$.
Gilt nun $\mathcal{I} \models \forall x.F$, dann auch insbesondere $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models F$.
Also auch $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models G$ und $\mathcal{I} \models \exists x.G$.
Zusammengenommen erhalten wir so $\mathcal{I} \models \forall x.F \to \exists x.G$.

$\Leftarrow$: Sei nun $\mathcal{I} \models (\forall x.F) \to (\exists x.G)$ und angenommen $\mathcal{I} \not\models \exists x.(F \to G)$.
Dann gilt für alle $a \in \Delta^{\mathcal{I}}$ auch $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models F$ und $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \not\models G$.
m.a.W. $\mathcal{I} \models \forall x.(F \land \neg G) \equiv \forall x.F \land \forall x.\neg G$
Also $\mathcal{I} \models \forall x.F$ und $\mathcal{I} \models \forall x \neg G \equiv \neg\exists x.G$.

S - Semantische Äquivalenz in FOL

Seien F, G Formeln und x eine Variable. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\exists x.(F \rightarrow G) \equiv \forall x.F \rightarrow \exists x.G.$$

$\Rightarrow$: Sei $\mathcal{I} \models \exists x.(F \rightarrow G)$. Dann gibt es $a \in \Delta^{\mathcal{I}}$ mit $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models F \rightarrow G$.
Gilt nun $\mathcal{I} \models \forall x.F$, dann auch insbesondere $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models F$.
Also auch $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models G$ und $\mathcal{I} \models \exists x.G$.
Zusammengenommen erhalten wir so $\mathcal{I} \models \forall x.F \rightarrow \exists x.G$.

$\Leftarrow$: Sei nun $\mathcal{I} \models (\forall x.F) \rightarrow (\exists x.G)$ und angenommen $\mathcal{I} \not\models \exists x.(F \rightarrow G)$.
Dann gilt für alle $a \in \Delta^{\mathcal{I}}$ auch $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models F$ und $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \not\models G$.
m.a.W. $\mathcal{I} \models \forall x.(F \land \neg G) \equiv \forall x.F \land \forall x.\neg G$
Also $\mathcal{I} \models \forall x.F$ und $\mathcal{I} \models \forall x \neg G \equiv \neg \exists x.G$.
Insgesamt gilt: $\mathcal{I} \not\models (\forall x.F) \rightarrow (\exists x.G)$.

S - Semantische Äquivalenz in FOL

Seien F, G Formeln und x eine Variable. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\exists x.(F \to G) \equiv \forall x.F \to \exists x.G.$$

$\Rightarrow$: Sei $\mathcal{I} \models \exists x.(F \to G)$. Dann gibt es $a \in \Delta^{\mathcal{I}}$ mit $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models F \to G$.
Gilt nun $\mathcal{I} \models \forall x.F$, dann auch insbesondere $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models F$.
Also auch $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models G$ und $\mathcal{I} \models \exists x.G$.
Zusammengenommen erhalten wir so $\mathcal{I} \models \forall x.F \to \exists x.G$.

$\Leftarrow$: Sei nun $\mathcal{I} \models (\forall x.F) \to (\exists x.G)$ und angenommen $\mathcal{I} \not\models \exists x.(F \to G)$.
Dann gilt für alle $a \in \Delta^{\mathcal{I}}$ auch $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models F$ und $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \not\models G$.
m.a.W. $\mathcal{I} \models \forall x.(F \land \neg G) \equiv \forall x.F \land \forall x.\neg G$
Also $\mathcal{I} \models \forall x.F$ und $\mathcal{I} \models \forall x \neg G \equiv \neg\exists x.G$.
Insgesamt gilt: $\mathcal{I} \not\models (\forall x.F) \to (\exists x.G)$. Widerspruch!

T - In Form bringen bitte!

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jede Formel in Pränexform ist in Skolemform.
2. Jede Formel in Skolemform ist in Pränexform.
3. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel.
4. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel in Pränexform.
5. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel in Skolemform.

T - In Form bringen bitte!

Bereinigte Formeln

Eine Formel F ist bereinigt wenn sie die folgenden beiden Eigenschaften hat:

1. Keine Variable in F kommt sowohl frei als auch gebunden vor
2. Keine Variable in F wird in mehr als einem Quantor gebunden

Man kann jede Formel leicht durch Umbenennung gebundener Variablen bereinigen.

Beispiel: Die Formel

$$\forall y.(p(x, y) \to \exists x.(r(y, x) \land \forall y.q(x, y)))$$

kann wie folgt bereinigt werden:

$$\forall y.(p(x, y) \to \exists z.(r(y, z) \land \forall v.q(z, v)))$$

T - In Form bringen bitte!

Pränexform

Eine Formel ist in Pränexform, wenn alle ihre Quantoren am Anfang stehen, d.h. wenn sie die folgende Form hat

$$\mathsf{Q}_1 x_1. \cdots \mathsf{Q}_n x_n.F$$

mit $\mathsf{Q}_1, \ldots, \mathsf{Q}_n \in \{\exists, \forall\}$ und F eine Formel ohne Quantoren.

Man kann beliebige Formeln leicht in äquivalente Formeln in Pränexform umwandeln.

T - In Form bringen bitte!

Skolemisierung

Sei $\forall x_1.\cdots\forall x_n.\exists y.F$ eine Formel in Pränexform, bei der $\exists y$ das erste Vorkommen eines Existenzquantors ist. Die Skolemisierung von y ist die Formel $\forall x_1.\cdots\forall x_n.F'$, definiert wie folgt:

- $F' = F\{y \mapsto f(x_1,\ldots,x_n)\}$ entsteht aus F, indem man jedes (freie) Vorkommen von y in F durch den Skolemterm $f(x_1,\ldots,x_n)$ ersetzt
- dabei ist f ein n-stelliges Funktionssymbol, das bisher nirgends verwendet wurde, genannt Skolemfunktion.

Die Skolemisierung einer Formel in Pränexform erhält man durch Skolemisieren jeder ihrer existentiell quantifizierten Variablen, von vorn nach hinten.

Beispiel: Für die Formel $\forall x.\exists y.\forall z.\exists v.p(x,y,z,v)$ ergibt sich:

Skolemisierung von y: $\forall x.\forall z.\exists v.p(x,f(x),z,v)$

Skolemisierung von v: $\forall x.\forall z.p(x,f(x),z,g(x,z))$

T - In Form bringen bitte!

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jede Formel in Pränexform ist in Skolemform.
2. Jede Formel in Skolemform ist in Pränexform.
3. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel.
4. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel in Pränexform.
5. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel in Skolemform.

T - In Form bringen bitte!

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jede Formel in Pränexform ist in Skolemform.
2. Jede Formel in Skolemform ist in Pränexform.
3. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel.
4. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel in Pränexform.
5. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel in Skolemform.

Falsch, zum Beispiel $\exists x.p(x)$ ist in Pränexform, aber nicht in Skolemform

T - In Form bringen bitte!

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jede Formel in Pränexform ist in Skolemform.
2. Jede Formel in Skolemform ist in Pränexform.
3. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel.
4. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel in Pränexform.
5. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel in Skolemform.

T - In Form bringen bitte!

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jede Formel in Pränexform ist in Skolemform.
2. Jede Formel in Skolemform ist in Pränexform.
3. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel.
4. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel in Pränexform.
5. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel in Skolemform.

Ja, denn die Anforderung an eine Skolemform ist stärker als die an eine Pränexform

T - In Form bringen bitte!

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jede Formel in Pränexform ist in Skolemform.
2. Jede Formel in Skolemform ist in Pränexform.
3. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel.
4. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel in Pränexform.
5. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel in Skolemform.

T - In Form bringen bitte!

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jede Formel in Pränexform ist in Skolemform.
2. Jede Formel in Skolemform ist in Pränexform.
3. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel.
4. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel in Pränexform.
5. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel in Skolemform.

Ja, denn durch Umbenennung von Variablen kann jede Formel in eine äquivalente bereinigte Formel überführt werden.

T - In Form bringen bitte!

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jede Formel in Pränexform ist in Skolemform.
2. Jede Formel in Skolemform ist in Pränexform.
3. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel.
4. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel in Pränexform.
5. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel in Skolemform.

T - In Form bringen bitte!

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jede Formel in Pränexform ist in Skolemform.
2. Jede Formel in Skolemform ist in Pränexform.
3. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel.
4. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel in Pränexform.
5. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel in Skolemform.

Ja, da nach einer Bereinigung der Formel die Quantoren nach vorn geschoben werden können.

T - In Form bringen bitte!

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jede Formel in Pränexform ist in Skolemform.
2. Jede Formel in Skolemform ist in Pränexform.
3. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel.
4. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel in Pränexform.
5. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel in Skolemform.

T - In Form bringen bitte!

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jede Formel in Pränexform ist in Skolemform.
2. Jede Formel in Skolemform ist in Pränexform.
3. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel.
4. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel in Pränexform.
5. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel in Skolemform.

Nein, z.B. $\exists x.p(x)$ ist nicht äquivalent zu einer bereinigten Formel in Skolemform.

T - In Form bringen bitte!

Korrektheit der Skolemisierung

Skolemisierung führt nicht zu semantisch äquivalenten Formeln:

Beispiel: Die Formel $\forall x.\exists y.(p(x) \to p(y))$ ist eine Tautologie, aber ihre Skolemisierung $\forall x.(p(x) \to p(f(x)))$ ist widerlegbar:
Sei $\Delta^{\mathcal{I}} := \{\alpha, \beta\}$, $p^{\mathcal{I}} := \{\alpha\}$ sowie $f^{\mathcal{I}}(\delta) := \beta$ für alle $\delta \in \Delta^{\mathcal{I}}$.
Dann ist $\mathcal{I} \not\models \forall x.(p(x) \to p(f(x)))$, da $\mathcal{I}, \{x \mapsto \alpha\} \not\models p(x) \to p(f(x))$.

Skolemisierung erhält aber Erfüllbarkeit:

Satz: Eine Formel in Pränexform F ist genau dann erfüllbar, wenn auch die Skolemisierung von F erfüllbar ist.

Anmerkung: Man kann einen Erfüllbarkeitstest also auf der Skolemisierten Formel ausführen – das reicht, um logisches Schließen zu implementieren

U - Wäre ich doch ein grüner Drache

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in Prädikatenlogik:

a) Jeder Drache ist glücklich, wenn alle seine Drachen-Kinder fliegen können.
b) Grüne Drachen können fliegen.
c) Ein Drache ist grün, wenn er Kind mindestens eines grünen Drachen ist.
d) Alle grünen Drachen sind glücklich.

Zeigen Sie, dass die letzte Aussage aus den ersten drei folgt.

U - Wäre ich doch ein grüner Drache

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in Prädikatenlogik:

a) Jeder Drache ist glücklich, wenn alle seine Drachen-Kinder fliegen können.
b) Grüne Drachen können fliegen.
c) Ein Drache ist grün, wenn er Kind mindestens eines grünen Drachen ist.
d) Alle grünen Drachen sind glücklich.

Zeigen Sie, dass die letzte Aussage aus den ersten drei folgt.

Neue Prädikate: Drache(x), glücklich(x), Kind(x, y), fliegen(x), grün(x).

U - Wäre ich doch ein grüner Drache

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in Prädikatenlogik:

a) Jeder Drache ist glücklich, wenn alle seine Drachen-Kinder fliegen können.
b) Grüne Drachen können fliegen.
c) Ein Drache ist grün, wenn er Kind mindestens eines grünen Drachen ist.
d) Alle grünen Drachen sind glücklich.

Zeigen Sie, dass die letzte Aussage aus den ersten drei folgt.

Neue Prädikate: $\text{Drache}(x)$, $\text{glücklich}(x)$, $\text{Kind}(x, y)$, $\text{fliegen}(x)$, $\text{grün}(x)$.

$$F_a \coloneqq \forall x.(\text{Drache}(x) \rightarrow (\forall y.(\text{Kind}(x, y) \rightarrow \text{fliegen}(y)) \rightarrow \text{glücklich}(x)))$$

U - Wäre ich doch ein grüner Drache

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in Prädikatenlogik:

a) Jeder Drache ist glücklich, wenn alle seine Drachen-Kinder fliegen können.
b) Grüne Drachen können fliegen.
c) Ein Drache ist grün, wenn er Kind mindestens eines grünen Drachen ist.
d) Alle grünen Drachen sind glücklich.

Zeigen Sie, dass die letzte Aussage aus den ersten drei folgt.

Neue Prädikate: Drache(x), glücklich(x), Kind(x, y), fliegen(x), grün(x).

$$F_a \coloneqq \forall x.(\text{Drache}(x) \rightarrow (\forall y.(\text{Kind}(x, y) \rightarrow \text{fliegen}(y)) \rightarrow \text{glücklich}(x)))$$

$$F_b \coloneqq \forall x.((\text{Drache}(x) \wedge \text{grün}(x)) \rightarrow \text{fliegen}(x))$$

U - Wäre ich doch ein grüner Drache

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in Prädikatenlogik:

a) Jeder Drache ist glücklich, wenn alle seine Drachen-Kinder fliegen können.
b) Grüne Drachen können fliegen.
c) Ein Drache ist grün, wenn er Kind mindestens eines grünen Drachen ist.
d) Alle grünen Drachen sind glücklich.

Zeigen Sie, dass die letzte Aussage aus den ersten drei folgt.

Neue Prädikate: $\text{Drache}(x)$, $\text{glücklich}(x)$, $\text{Kind}(x, y)$, $\text{fliegen}(x)$, $\text{grün}(x)$.

$$F_a \coloneqq \forall x.(\text{Drache}(x) \to (\forall y.(\text{Kind}(x, y) \to \text{fliegen}(y)) \to \text{glücklich}(x)))$$

$$F_b \coloneqq \forall x.((\text{Drache}(x) \wedge \text{grün}(x)) \to \text{fliegen}(x))$$

$$F_c \coloneqq \forall x.(\text{Drache}(x) \to (\exists y.(\text{Kind}(y, x) \wedge \text{Drache}(y) \wedge \text{grün}(y)) \to \text{grün}(x)))$$

U - Wäre ich doch ein grüner Drache

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in Prädikatenlogik:

a) Jeder Drache ist glücklich, wenn alle seine Drachen-Kinder fliegen können.
b) Grüne Drachen können fliegen.
c) Ein Drache ist grün, wenn er Kind mindestens eines grünen Drachen ist.
d) Alle grünen Drachen sind glücklich.

Zeigen Sie, dass die letzte Aussage aus den ersten drei folgt.

Neue Prädikate: $\mathrm{Drache}(x)$, $\mathrm{glücklich}(x)$, $\mathrm{Kind}(x,y)$, $\mathrm{fliegen}(x)$, $\mathrm{grün}(x)$.

$$F_a \coloneqq \forall x.(\mathrm{Drache}(x) \rightarrow (\forall y.(\mathrm{Kind}(x,y) \rightarrow \mathrm{fliegen}(y)) \rightarrow \mathrm{glücklich}(x)))$$

$$F_b \coloneqq \forall x.((\mathrm{Drache}(x) \wedge \mathrm{grün}(x)) \rightarrow \mathrm{fliegen}(x))$$

$$F_c \coloneqq \forall x.(\mathrm{Drache}(x) \rightarrow (\exists y.(\mathrm{Kind}(y,x) \wedge \mathrm{Drache}(y) \wedge \mathrm{grün}(y)) \rightarrow \mathrm{grün}(x)))$$

$$F_d \coloneqq \forall x.((\mathrm{Drache}(x) \wedge \mathrm{grün}(x)) \rightarrow \mathrm{glücklich}(x))$$

U - Wäre ich doch ein grüner Drache

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in Prädikatenlogik:

a) Jeder Drache ist glücklich, wenn alle seine Drachen-Kinder fliegen können.
b) Grüne Drachen können fliegen.
c) Ein Drache ist grün, wenn er Kind mindestens eines grünen Drachen ist.
d) Alle grünen Drachen sind glücklich.

Zeigen Sie, dass die letzte Aussage aus den ersten drei folgt.

U - Wäre ich doch ein grüner Drache

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in Prädikatenlogik:

a) Jeder Drache ist glücklich, wenn alle seine Drachen-Kinder fliegen können.
b) Grüne Drachen können fliegen.
c) Ein Drache ist grün, wenn er Kind mindestens eines grünen Drachen ist.
d) Alle grünen Drachen sind glücklich.

Zeigen Sie, dass die letzte Aussage aus den ersten drei folgt.

Sei x nun ein grüner Drache, und sei y ein Kind von x (welches ein Drache ist).

U - Wäre ich doch ein grüner Drache

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in Prädikatenlogik:

a) Jeder Drache ist glücklich, wenn alle seine Drachen-Kinder fliegen können.
b) Grüne Drachen können fliegen.
c) Ein Drache ist grün, wenn er Kind mindestens eines grünen Drachen ist.
d) Alle grünen Drachen sind glücklich.

Zeigen Sie, dass die letzte Aussage aus den ersten drei folgt.

Sei x nun ein grüner Drache, und sei y ein Kind von x (welches ein Drache ist).

$\Rightarrow$ dann ist nach F_c auch y ein grüner Drache

U - Wäre ich doch ein grüner Drache

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in Prädikatenlogik:

a) Jeder Drache ist glücklich, wenn alle seine Drachen-Kinder fliegen können.
b) Grüne Drachen können fliegen.
c) Ein Drache ist grün, wenn er Kind mindestens eines grünen Drachen ist.
d) Alle grünen Drachen sind glücklich.

Zeigen Sie, dass die letzte Aussage aus den ersten drei folgt.

Sei x nun ein grüner Drache, und sei y ein Kind von x (welches ein Drache ist).

$\Rightarrow$ dann ist nach F_c auch y ein grüner Drache

$\Rightarrow$ nach F_b kann y dann auch fliegen

U - Wäre ich doch ein grüner Drache

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in Prädikatenlogik:

a) Jeder Drache ist glücklich, wenn alle seine Drachen-Kinder fliegen können.
b) Grüne Drachen können fliegen.
c) Ein Drache ist grün, wenn er Kind mindestens eines grünen Drachen ist.
d) Alle grünen Drachen sind glücklich.

Zeigen Sie, dass die letzte Aussage aus den ersten drei folgt.

Sei x nun ein grüner Drache, und sei y ein Kind von x (welches ein Drache ist).

$\Rightarrow$ dann ist nach F_c auch y ein grüner Drache
$\Rightarrow$ nach F_b kann y dann auch fliegen
$\Rightarrow$ das bedeutet, dass alle Kinder von x fliegen können

U - Wäre ich doch ein grüner Drache

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in Prädikatenlogik:

a) Jeder Drache ist glücklich, wenn alle seine Drachen-Kinder fliegen können.
b) Grüne Drachen können fliegen.
c) Ein Drache ist grün, wenn er Kind mindestens eines grünen Drachen ist.
d) Alle grünen Drachen sind glücklich.

Zeigen Sie, dass die letzte Aussage aus den ersten drei folgt.

Sei x nun ein grüner Drache, und sei y ein Kind von x (welches ein Drache ist).

$\Rightarrow$ dann ist nach F_c auch y ein grüner Drache

$\Rightarrow$ nach F_b kann y dann auch fliegen

$\Rightarrow$ das bedeutet, dass alle Kinder von x fliegen können

$\Rightarrow$ mit F_a folgt daraus, dass x glücklich ist

V - Modell gesucht

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Zwei prädikatenlogische Formeln F und G sind äquivalent, wenn die Formel $F \leftrightarrow G$ allgemeingültig ist.
2. Jede erfüllbare Formel der Prädikatenlogik erster Stufe hat ein endliches Modell.
3. Jede erfüllbare Formel der Prädikatenlogik erster Stufe hat ein abzählbares Modell.
4. Jede Skolemformel hat höchstens eine Herbrand-Interpretation.
5. Jede Skolemformel hat mindestens ein Herbrand-Modell.

V - Modell gesucht

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Zwei prädikatenlogische Formeln F und G sind äquivalent, wenn die Formel $F \leftrightarrow G$ allgemeingültig ist.
2. Jede erfüllbare Formel der Prädikatenlogik erster Stufe hat ein endliches Modell.
3. Jede erfüllbare Formel der Prädikatenlogik erster Stufe hat ein abzählbares Modell.
4. Jede Skolemformel hat höchstens eine Herbrand-Interpretation.
5. Jede Skolemformel hat mindestens ein Herbrand-Modell.

Ja, folgt aus dem Deduktionstheorem (VL 14/25).

V - Modell gesucht

„$\models$ = $\rightarrow$“ und „$\equiv$ = $\leftrightarrow$“

Auch die folgenden Sätze gelten analog zur Aussagenlogik (siehe Formale Systeme, Vorlesung 22):

Satz (Deduktionstheorem): Für jede Formelmenge $\mathcal{F}$ und Formeln G und H gilt $\mathcal{F} \models G \rightarrow H$ genau dann wenn $\mathcal{F} \cup \{G\} \models H$.

Korollar: $F \wedge G \models H$ genau dann wenn $F \models G \rightarrow H$.

Korollar: $F \equiv G$ genau dann wenn $\models F \leftrightarrow G$.

Dennoch sind $\models$ und $\equiv$ nicht das selbe wie $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$:

- $\models$ und $\equiv$ können sich auch auf (möglicherweise unendliche) Mengen von Formeln beziehen
- $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ sind syntaktische Operatoren und können (eventuell geschachtelt) in Formeln auftreten

V - Modell gesucht

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Zwei prädikatenlogische Formeln F und G sind äquivalent, wenn die Formel $F \leftrightarrow G$ allgemeingültig ist.
2. Jede erfüllbare Formel der Prädikatenlogik erster Stufe hat ein endliches Modell.
3. Jede erfüllbare Formel der Prädikatenlogik erster Stufe hat ein abzählbares Modell.
4. Jede Skolemformel hat höchstens eine Herbrand-Interpretation.
5. Jede Skolemformel hat mindestens ein Herbrand-Modell.

V - Modell gesucht

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Zwei prädikatenlogische Formeln F und G sind äquivalent, wenn die Formel $F \leftrightarrow G$ allgemeingültig ist.
2. Jede erfüllbare Formel der Prädikatenlogik erster Stufe hat ein endliches Modell.
3. Jede erfüllbare Formel der Prädikatenlogik erster Stufe hat ein abzählbares Modell.
4. Jede Skolemformel hat höchstens eine Herbrand-Interpretation.
5. Jede Skolemformel hat mindestens ein Herbrand-Modell.

Nein, es gibt erfüllbare Formeln, die nur unendliche Modelle besitzen (vgl. VL 20/20).

V - Modell gesucht

Endlichkeit von Modellen

Löwenheim-Skolem: Jede erfüllbare Formel hat ein abzählbar großes Modell

Kann man dies noch verstärken? Hat jede erfüllbare Formel vielleicht sogar ein endliches Modell?

Nein! Prädikatenlogik kann unendliche Modelle erzwingen:

Beispiel:

$$\forall x.(\mathsf{Mensch}(x) \to \exists y.(\mathsf{hatMutter}(x,y) \land \mathsf{Mensch}(y)))$$

$$\forall x,y.(\mathsf{hatMutter}(x,y) \to \mathsf{hatVorfahre}(x,y))$$

$$\forall x,y,z.((\mathsf{hatVorfahre}(x,y) \land \mathsf{hatVorfahre}(y,z)) \to \mathsf{hatVorfahre}(x,z))$$

$$\forall x.\neg\mathsf{hatVorfahre}(x,x)$$

Diese Theorie ist erfüllbar, aber hat nur unendliche Modelle.
(Kontrollfrage: Warum?)

V - Modell gesucht

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Zwei prädikatenlogische Formeln F und G sind äquivalent, wenn die Formel $F \leftrightarrow G$ allgemeingültig ist.
2. Jede erfüllbare Formel der Prädikatenlogik erster Stufe hat ein endliches Modell.
3. Jede erfüllbare Formel der Prädikatenlogik erster Stufe hat ein abzählbares Modell.
4. Jede Skolemformel hat höchstens eine Herbrand-Interpretation.
5. Jede Skolemformel hat mindestens ein Herbrand-Modell.

V - Modell gesucht

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Zwei prädikatenlogische Formeln F und G sind äquivalent, wenn die Formel $F \leftrightarrow G$ allgemeingültig ist.
2. Jede erfüllbare Formel der Prädikatenlogik erster Stufe hat ein endliches Modell.
3. Jede erfüllbare Formel der Prädikatenlogik erster Stufe hat ein abzählbares Modell.
4. Jede Skolemformel hat höchstens eine Herbrand-Interpretation.
5. Jede Skolemformel hat mindestens ein Herbrand-Modell.

Ja, ebenfalls nach dem Satz von Löwenheim-Skolem (VL 20/20).

V - Modell gesucht

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Zwei prädikatenlogische Formeln F und G sind äquivalent, wenn die Formel $F \leftrightarrow G$ allgemeingültig ist.
2. Jede erfüllbare Formel der Prädikatenlogik erster Stufe hat ein endliches Modell.
3. Jede erfüllbare Formel der Prädikatenlogik erster Stufe hat ein abzählbares Modell.
4. Jede Skolemformel hat höchstens eine Herbrand-Interpretation.
5. Jede Skolemformel hat mindestens ein Herbrand-Modell.

V - Modell gesucht

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Zwei prädikatenlogische Formeln F und G sind äquivalent, wenn die Formel $F \leftrightarrow G$ allgemeingültig ist.
2. Jede erfüllbare Formel der Prädikatenlogik erster Stufe hat ein endliches Modell.
3. Jede erfüllbare Formel der Prädikatenlogik erster Stufe hat ein abzählbares Modell.
4. Jede Skolemformel hat höchstens eine Herbrand-Interpretation.
5. Jede Skolemformel hat mindestens ein Herbrand-Modell.

Nein, da die Wahl der Prädikatensymbole noch offen ist.

V - Modell gesucht

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Zwei prädikatenlogische Formeln F und G sind äquivalent, wenn die Formel $F \leftrightarrow G$ allgemeingültig ist.
2. Jede erfüllbare Formel der Prädikatenlogik erster Stufe hat ein endliches Modell.
3. Jede erfüllbare Formel der Prädikatenlogik erster Stufe hat ein abzählbares Modell.
4. Jede Skolemformel hat höchstens eine Herbrand-Interpretation.
5. Jede Skolemformel hat mindestens ein Herbrand-Modell.

V - Modell gesucht

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Zwei prädikatenlogische Formeln F und G sind äquivalent, wenn die Formel $F \leftrightarrow G$ allgemeingültig ist.
2. Jede erfüllbare Formel der Prädikatenlogik erster Stufe hat ein endliches Modell.
3. Jede erfüllbare Formel der Prädikatenlogik erster Stufe hat ein abzählbares Modell.
4. Jede Skolemformel hat höchstens eine Herbrand-Interpretation.
5. Jede Skolemformel hat mindestens ein Herbrand-Modell.

Nein, dies ist nur dann der Fall, wenn die Formel erfüllbar ist.

W - Resolution zum Schlussfolgern

Zeigen Sie, dass man das Resolutionsverfahren der Prädikatenlogik erster Stufe auch zum Nachweis von semantischen Konsequenzen nutzen kann, indem Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen nachweisen:

1. $\Gamma \models F$.
2. $\Gamma \cup \{\neg F\}$ ist unerfüllbar.
3. $\bigwedge \Gamma \to F$ ist allgemeingültig.
4. $\bigwedge \Gamma \wedge \neg F$ ist unerfüllbar.

Hierbei sei $\bigwedge \Gamma = \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n$ für $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$.

W - Resolution zum Schlussfolgern

Zeigen Sie, dass man das Resolutionsverfahren der Prädikatenlogik erster Stufe auch zum Nachweis von semantischen Konsequenzen nutzen kann, indem Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen nachweisen:

1. $\Gamma \models F$.
2. $\Gamma \cup \{\neg F\}$ ist unerfüllbar.
3. $\bigwedge \Gamma \rightarrow F$ ist allgemeingültig.
4. $\bigwedge \Gamma \wedge \neg F$ ist unerfüllbar.

Hierbei sei $\bigwedge \Gamma = \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n$ für $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$.

Angenommen, es gilt $\Gamma \models F$.

W - Resolution zum Schlussfolgern

Zeigen Sie, dass man das Resolutionsverfahren der Prädikatenlogik erster Stufe auch zum Nachweis von semantischen Konsequenzen nutzen kann, indem Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen nachweisen:

1. $\Gamma \models F$.
2. $\Gamma \cup \{\neg F\}$ ist unerfüllbar.
3. $\bigwedge \Gamma \rightarrow F$ ist allgemeingültig.
4. $\bigwedge \Gamma \wedge \neg F$ ist unerfüllbar.

Hierbei sei $\bigwedge \Gamma = \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n$ für $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$.

Angenommen, es gilt $\Gamma \models F$.
Ist $\mathfrak{I}$ ein Modell für Γ, dann ist $\mathfrak{I}$ auch ein Modell für F.

W - Resolution zum Schlussfolgern

Zeigen Sie, dass man das Resolutionsverfahren der Prädikatenlogik erster Stufe auch zum Nachweis von semantischen Konsequenzen nutzen kann, indem Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen nachweisen:

1. $\Gamma \models F$.
2. $\Gamma \cup \{\neg F\}$ ist unerfüllbar.
3. $\bigwedge \Gamma \rightarrow F$ ist allgemeingültig.
4. $\bigwedge \Gamma \wedge \neg F$ ist unerfüllbar.

Hierbei sei $\bigwedge \Gamma = \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n$ für $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$.

Angenommen, es gilt $\Gamma \models F$.
Ist $\mathfrak{I}$ ein Modell für Γ, dann ist $\mathfrak{I}$ auch ein Modell für F.
Damit ist $\mathfrak{I}$ kein Modell für $\neg F$.

W - Resolution zum Schlussfolgern

Zeigen Sie, dass man das Resolutionsverfahren der Prädikatenlogik erster Stufe auch zum Nachweis von semantischen Konsequenzen nutzen kann, indem Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen nachweisen:

1. $\Gamma \models F$.
2. $\Gamma \cup \{\neg F\}$ ist unerfüllbar.
3. $\bigwedge \Gamma \to F$ ist allgemeingültig.
4. $\bigwedge \Gamma \wedge \neg F$ ist unerfüllbar.

Hierbei sei $\bigwedge \Gamma = \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n$ für $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$.

Angenommen, es gilt $\Gamma \models F$.
Ist $\mathfrak{I}$ ein Modell für Γ, dann ist $\mathfrak{I}$ auch ein Modell für F.
Damit ist $\mathfrak{I}$ kein Modell für $\neg F$.
Also ist $\Gamma \cup \{\neg F\}$ unerfüllbar.

W - Resolution zum Schlussfolgern

Zeigen Sie, dass man das Resolutionsverfahren der Prädikatenlogik erster Stufe auch zum Nachweis von semantischen Konsequenzen nutzen kann, indem Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen nachweisen:

1. $\Gamma \models F$.
2. $\Gamma \cup \{\neg F\}$ ist unerfüllbar.
3. $\bigwedge \Gamma \to F$ ist allgemeingültig.
4. $\bigwedge \Gamma \land \neg F$ ist unerfüllbar.

Hierbei sei $\bigwedge \Gamma = \gamma_1 \land \cdots \land \gamma_n$ für $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$.

Angenommen, $\Gamma \cup \{\neg F\}$ ist unerfüllbar.

W - Resolution zum Schlussfolgern

Zeigen Sie, dass man das Resolutionsverfahren der Prädikatenlogik erster Stufe auch zum Nachweis von semantischen Konsequenzen nutzen kann, indem Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen nachweisen:

1. $\Gamma \models F$.
2. $\Gamma \cup \{\neg F\}$ ist unerfüllbar.
3. $\bigwedge \Gamma \to F$ ist allgemeingültig.
4. $\bigwedge \Gamma \wedge \neg F$ ist unerfüllbar.

Hierbei sei $\bigwedge \Gamma = \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n$ für $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$.

Angenommen, $\Gamma \cup \{\neg F\}$ ist unerfüllbar.
Ist $\mathfrak{I}$ Modell für $\bigwedge \Gamma$, dann ist $\mathfrak{I}$ auch Modell für Γ.

W - Resolution zum Schlussfolgern

Zeigen Sie, dass man das Resolutionsverfahren der Prädikatenlogik erster Stufe auch zum Nachweis von semantischen Konsequenzen nutzen kann, indem Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen nachweisen:

1. $\Gamma \models F$.
2. $\Gamma \cup \{\neg F\}$ ist unerfüllbar.
3. $\bigwedge \Gamma \rightarrow F$ ist allgemeingültig.
4. $\bigwedge \Gamma \wedge \neg F$ ist unerfüllbar.

Hierbei sei $\bigwedge \Gamma = \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n$ für $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$.

Angenommen, $\Gamma \cup \{\neg F\}$ ist unerfüllbar.
Ist $\mathfrak{I}$ Modell für $\bigwedge \Gamma$, dann ist $\mathfrak{I}$ auch Modell für Γ.
Weil $\Gamma \cup \{\neg F\}$ unerfüllbar ist, kann $\mathfrak{I}$ kein Modell für $\neg F$ sein.

W - Resolution zum Schlussfolgern

Zeigen Sie, dass man das Resolutionsverfahren der Prädikatenlogik erster Stufe auch zum Nachweis von semantischen Konsequenzen nutzen kann, indem Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen nachweisen:

1. $\Gamma \models F$.
2. $\Gamma \cup \{\neg F\}$ ist unerfüllbar.
3. $\bigwedge \Gamma \to F$ ist allgemeingültig.
4. $\bigwedge \Gamma \wedge \neg F$ ist unerfüllbar.

Hierbei sei $\bigwedge \Gamma = \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n$ für $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$.

Angenommen, $\Gamma \cup \{\neg F\}$ ist unerfüllbar.
Ist $\mathfrak{I}$ Modell für $\bigwedge \Gamma$, dann ist $\mathfrak{I}$ auch Modell für Γ.
Weil $\Gamma \cup \{\neg F\}$ unerfüllbar ist, kann $\mathfrak{I}$ kein Modell für $\neg F$ sein.
Also gilt $\mathfrak{I} \models F$, und damit ist $\bigwedge \Gamma \to F$ allgemeingültig.

W - Resolution zum Schlussfolgern

Zeigen Sie, dass man das Resolutionsverfahren der Prädikatenlogik erster Stufe auch zum Nachweis von semantischen Konsequenzen nutzen kann, indem Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen nachweisen:

1. $\Gamma \models F$.
2. $\Gamma \cup \{\neg F\}$ ist unerfüllbar.
3. $\bigwedge \Gamma \to F$ ist allgemeingültig.
4. $\bigwedge \Gamma \wedge \neg F$ ist unerfüllbar.

Hierbei sei $\bigwedge \Gamma = \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n$ für $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$.

Angenommen, $\bigwedge \Gamma \to F$ ist allgemeingültig.

W - Resolution zum Schlussfolgern

Zeigen Sie, dass man das Resolutionsverfahren der Prädikatenlogik erster Stufe auch zum Nachweis von semantischen Konsequenzen nutzen kann, indem Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen nachweisen:

1. $\Gamma \models F$.
2. $\Gamma \cup \{\neg F\}$ ist unerfüllbar.
3. $\bigwedge \Gamma \rightarrow F$ ist allgemeingültig.
4. $\bigwedge \Gamma \wedge \neg F$ ist unerfüllbar.

Hierbei sei $\bigwedge \Gamma = \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n$ für $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$.

Angenommen, $\bigwedge \Gamma \rightarrow F$ ist allgemeingültig.
Dann ist jedes Modell $\mathfrak{I}$ von $\bigwedge \Gamma$ auch Modell von F.

W - Resolution zum Schlussfolgern

Zeigen Sie, dass man das Resolutionsverfahren der Prädikatenlogik erster Stufe auch zum Nachweis von semantischen Konsequenzen nutzen kann, indem Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen nachweisen:

1. $\Gamma \models F$.
2. $\Gamma \cup \{\neg F\}$ ist unerfüllbar.
3. $\bigwedge \Gamma \to F$ ist allgemeingültig.
4. $\bigwedge \Gamma \wedge \neg F$ ist unerfüllbar.

Hierbei sei $\bigwedge \Gamma = \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n$ für $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$.

Angenommen, $\bigwedge \Gamma \to F$ ist allgemeingültig.
Dann ist jedes Modell $\mathfrak{I}$ von $\bigwedge \Gamma$ auch Modell von F.
Also ist $\bigwedge \Gamma \wedge \neg F$ unerfüllbar.

W - Resolution zum Schlussfolgern

Zeigen Sie, dass man das Resolutionsverfahren der Prädikatenlogik erster Stufe auch zum Nachweis von semantischen Konsequenzen nutzen kann, indem Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen nachweisen:

1. $\Gamma \models F$.
2. $\Gamma \cup \{\neg F\}$ ist unerfüllbar.
3. $\bigwedge \Gamma \rightarrow F$ ist allgemeingültig.
4. $\bigwedge \Gamma \wedge \neg F$ ist unerfüllbar.

Hierbei sei $\bigwedge \Gamma = \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n$ für $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$.

Angenommen, $\bigwedge \Gamma \wedge \neg F$ ist unerfüllbar.

W - Resolution zum Schlussfolgern

Zeigen Sie, dass man das Resolutionsverfahren der Prädikatenlogik erster Stufe auch zum Nachweis von semantischen Konsequenzen nutzen kann, indem Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen nachweisen:

1. $\Gamma \models F$.
2. $\Gamma \cup \{\neg F\}$ ist unerfüllbar.
3. $\bigwedge \Gamma \rightarrow F$ ist allgemeingültig.
4. $\bigwedge \Gamma \wedge \neg F$ ist unerfüllbar.

Hierbei sei $\bigwedge \Gamma = \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n$ für $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$.

Angenommen, $\bigwedge \Gamma \wedge \neg F$ ist unerfüllbar.
Ist $\mathfrak{I}$ ein Modell für Γ, dann kann $\mathfrak{I}$ kein Modell für $\neg F$ sein.

W - Resolution zum Schlussfolgern

Zeigen Sie, dass man das Resolutionsverfahren der Prädikatenlogik erster Stufe auch zum Nachweis von semantischen Konsequenzen nutzen kann, indem Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen nachweisen:

1. $\Gamma \models F$.
2. $\Gamma \cup \{\neg F\}$ ist unerfüllbar.
3. $\bigwedge \Gamma \to F$ ist allgemeingültig.
4. $\bigwedge \Gamma \land \neg F$ ist unerfüllbar.

Hierbei sei $\bigwedge \Gamma = \gamma_1 \land \cdots \land \gamma_n$ für $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$.

Angenommen, $\bigwedge \Gamma \land \neg F$ ist unerfüllbar.
Ist $\mathfrak{I}$ ein Modell für Γ, dann kann $\mathfrak{I}$ kein Modell für $\neg F$ sein.
Also folgt $\mathfrak{I} \models F$, und damit $\Gamma \models F$.

W - Resolution zum Schlussfolgern

Zeigen Sie, dass man das Resolutionsverfahren der Prädikatenlogik erster Stufe auch zum Nachweis von semantischen Konsequenzen nutzen kann, indem Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen nachweisen:

1. $\Gamma \models F$.
2. $\Gamma \cup \{\neg F\}$ ist unerfüllbar.
3. $\bigwedge \Gamma \rightarrow F$ ist allgemeingültig.
4. $\bigwedge \Gamma \wedge \neg F$ ist unerfüllbar.

Hierbei sei $\bigwedge \Gamma = \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n$ für $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$.

X - Lieber den Experten fragen!

Zeigen Sie mittels prädikatenlogischer Resolution, dass die Formulierung des Barbier-Paradoxons aus Aufgabe 4 von Übungsblatt 9 unerfüllbar ist:

> Der Barbier rasiert genau diejenigen Personen, die sich nicht selbst rasieren.

X - Lieber den Experten fragen!

Zeigen Sie mittels prädikatenlogischer Resolution, dass die Formulierung des Barbier-Paradoxons aus Aufgabe 4 von Übungsblatt 9 unerfüllbar ist:

> Der Barbier rasiert genau diejenigen Personen, die sich nicht selbst rasieren.

Die Formalisierung des Barbierproblems war:

$$\forall x.((p(b, x) \leftrightarrow \neg p(x, x)))$$

X - Lieber den Experten fragen!

Zeigen Sie mittels prädikatenlogischer Resolution, dass die Formulierung des Barbier-Paradoxons aus Aufgabe 4 von Übungsblatt 9 unerfüllbar ist:

> Der Barbier rasiert genau diejenigen Personen, die sich nicht selbst rasieren.

Die Formalisierung des Barbierproblems war:

$$\forall x.((p(b,x) \leftrightarrow \neg p(x,x)))$$

Umformuliert: $\forall x.((\neg p(b,x) \vee \neg p(x,x)) \wedge (p(x,x) \vee p(b,x)))$

X - Lieber den Experten fragen!

Zeigen Sie mittels prädikatenlogischer Resolution, dass die Formulierung des Barbier-Paradoxons aus Aufgabe 4 von Übungsblatt 9 unerfüllbar ist:

Der Barbier rasiert genau diejenigen Personen, die sich nicht selbst rasieren.

Die Formalisierung des Barbierproblems war:

$$\forall x.((p(b,x) \leftrightarrow \neg p(x,x)))$$

Umformuliert: $\forall x.((\neg p(b,x) \lor \neg p(x,x)) \land (p(x,x) \lor p(b,x)))$

Daraus ergibt sich die Klauselmenge:

$$\{\{\neg p(b,x), \neg p(x,x)\}, \{p(x,x), p(b,x)\}\}$$

X - Lieber den Experten fragen!

Zeigen Sie mittels prädikatenlogischer Resolution, dass die Formulierung des Barbier-Paradoxons aus Aufgabe 4 von Übungsblatt 9 unerfüllbar ist:

> Der Barbier rasiert genau diejenigen Personen, die sich nicht selbst rasieren.

Die Formalisierung des Barbierproblems war:

$$\forall x.((p(b,x) \leftrightarrow \neg p(x,x)))$$

Umformuliert: $\forall x.((\neg p(b,x) \vee \neg p(x,x)) \wedge (p(x,x) \vee p(b,x)))$

Daraus ergibt sich die Klauselmenge:

$$\{\{\neg p(b,x), \neg p(x,x)\}, \{p(x,x), p(b,x)\}\}$$

Mit Anwendung des Unifikators $\{x \mapsto b\}$ ergibt sich sofort die leere Klausel.