Fakultät Informatik, Institut für Künstliche Intelligenz, Professur Computational Logic

Dr. habil. Hannes Straß Dr. Dörthe Arndt

Übungen zur Lehrveranstaltung

Theoretische Informatik und Logik

Sommersemester 2022

6. Übungsblatt

Woche vom 23. bis 27. Mai 2022

Die folgenden Aufgaben werden nicht in den Übungen besprochen und dienen der Selbstkontrolle.

Aufgabe K

Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) Ist $\mathbf{L}_2 \in \text{PSpace}$ und gilt $\mathbf{L}_1 \leq_p \mathbf{L}_2$, so ist auch $\mathbf{L}_1 \in \text{PSpace}$.

b) Ist $\mathbf{L}_1$ ein PSpace-hartes Problem, und gilt $\mathbf{L}_1 \leq_p \mathbf{L}_2$, dann ist auch $\mathbf{L}_2$ ein PSpace-hartes Problem.

Aufgabe L

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Jedes PSpace-harte Problem ist NP-hart.

b) Es gibt kein NP-hartes Problem, welches in PSpace liegt.

c) Jedes NP-vollständige Problem liegt in PSpace.

d) Es gilt NP = PSpace, wenn es ein PSpace-hartes Problem in NP gibt.

e) Wenn $\text{P} \neq \text{NP}$ gilt, dann gibt es kein NP-hartes Problem in P.

f) Sei $\mathbf{L}$ ein PSpace-vollständiges Problem. Dann gilt $\mathbf{L} \in \text{P} \iff \text{P} = \text{PSpace}$.

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass PSpace unter Komplement, Durchschnitt, Vereinigung, Konkatenation und Kleene-Stern abgeschlossen ist.

Aufgabe 2

Wir betrachten das japanische Spiel *Gomoku*, welches von zwei Spielern X und O auf einem 19×19-Brett gespielt wird. Die Spieler setzen abwechselnd ihre Steine auf das Brett, und derjenige Spieler, der zuerst fünf Steine in einer Reihe (horizontal, vertikal, oder diagonal) gelegt hat, gewinnt. Spieler X beginnt.

Verallgemeinertes Gomoku wird statt auf einem Brett fester Größe auf einem beliebigen $n \times n$-Brett gespielt. Eine *Position* in diesem Spiel ist eine Belegung der Felder des Spielbretts mit Steinen der Spieler X und O, wie sie in einem wirklichen Spiel auftreten könnte. Sei

$$\begin{aligned}\mathbf{GM} := \{\, \mathsf{enc}(B) \mid B &\text{ ist eine Position im verallgemeinerten Gomoku,} \\ &\text{in der } \mathsf{X} \text{ eine Gewinnstrategie hat} \,\},\end{aligned}$$

wobei $\mathsf{enc}(B)$ die zeilenweise Kodierung der Position B über einem festen Alphabet ist.

Argumentieren Sie, warum $\mathbf{GM} \in \textsc{PSpace}$ gilt.

Aufgabe 3

Welche der folgenden QBF-Formeln sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) $\exists p_1.p_1$

b) $\forall p_1.p_1$

c) $\exists p_1.\bot$

d) $\forall p_1.\exists p_2.p_2 \to p_1$

e) $\forall p_1.\exists p_2.\forall p_3.(p_1 \vee p_2) \wedge p_3$

f) $\forall p_1.\forall p_2.\exists p_3.\forall p_4.(p_1 \wedge p_2 \to p_4) \vee \neg p_3$

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass das Wortproblem für linear beschränkte Turingmaschinen (LBA)

$$\mathbf{P}_{\mathsf{LBA}} := \{\, \mathsf{enc}(\mathcal{M})\#\#\mathsf{enc}(w) \mid \mathcal{M} \text{ ein LBA, der } w \text{ akzeptiert} \,\}.$$

ein $\textsc{PSpace}$-vollständiges Problem ist.

Zur Erinnerung (aus Formale Systeme): Ein linear beschränkte Turingmaschine (linear bounded automaton, LBA) ist eine nichtdeterministische Turingmaschine, die den Lese-/Schreibkopf nicht über das letzte Eingabezeichen hinaus bewegen kann. Versucht sie das, so bleibt der Kopf stattdessen an der letzten Bandstelle stehen.