Formale Systeme

8. Übungsblatt

Wintersemester 2017/18

Aufgabe zur Selbstkontrolle (diese werden in den Übungen nicht besprochen)

S15) Betrachten Sie die Grammatik $G = (\{S, U, X, T, V, W, Y, D, E, A, B, C\}, \Sigma, P, S)$ mit $\Sigma = \{a, b, c\}$ und

$$\begin{aligned} P \;=\; \{ & S \longrightarrow UT, S \longrightarrow VW, U \longrightarrow XB, U \longrightarrow AB, \\ & X \longrightarrow AU, T \longrightarrow TC, T \longrightarrow c, V \longrightarrow AV, \\ & V \longrightarrow a, W \longrightarrow BY, W \longrightarrow BC, Y \longrightarrow WC, \\ & D \longrightarrow BC, D \longrightarrow BB, D \longrightarrow b, E \longrightarrow AB, \\ & E \longrightarrow AA, A \longrightarrow a, B \longrightarrow b, C \longrightarrow c\} \ . \end{aligned}$$

Verwenden Sie den CYK-Algorithmus (mit der Matrix-Notation aus der Vorlesung), um für die Wörter $w_1 = aabcc$ und $w_2 = aabbcc$ zu entscheiden, ob $w_i \in L(G)$ ist.

S16) Gegeben sind das Wort $w = aaaab$ und die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B, C\}, \Sigma = \{a, b\}$ und

$$\begin{aligned} P \;=\; \{ & S \longrightarrow AB, S \longrightarrow BC, S \longrightarrow bab, \\ & A \longrightarrow BA, A \longrightarrow a, \\ & B \longrightarrow ABC, B \longrightarrow b, \\ & C \longrightarrow AB, C \longrightarrow a, C \longrightarrow \varepsilon\} \ . \end{aligned}$$

a) Transformieren Sie die Grammatik G in eine ε-freie Grammatik G'.

b) Transformieren Sie die Grammatik G' in ihre *Chomsky*-Normalform.

c) Entscheiden Sie mithilfe des Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus, ob $w \in L(G)$ gilt.

Aufgabe 1

Beweisen Sie mithilfe der Abschlußeigenschaften für kontextfreie Sprachen, dass die nachfolgende Sprache

$$L_0 = \{a^i b^j c^k \mid i = j \text{ oder } j = k \text{ mit } i, j, k \geq 1\}$$

kontextfrei ist und geben dann eine kontextfreie Grammatik G_0 für L_0 an mit $L_0 = L(G_0)$.

Aufgabe 2

Geben Sie für die nachfolgenden Sprachen L_i jeweils eine (kontextfreie) Grammatik G_i in CNF mit $L_i = L(G_i)$ an:

1) Es sei L_1 genau die Menge der Palindrome über $\Sigma = \{a, b\}$.

   (Palindrome sind Wörter, die vorwärts und rückwärts gelesen gleich sind,

   z.B. aba, $abba$, a, ε, bb)

2) Es sei L_2 die Sprache aller $w \in \{a, b\}^*$ mit gleicher Anzahl an a's und b's.

3) Es sei $L_3 = \{(ab)^n(ba)^n \mid n \geq 0\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$

Aufgabe 3

Gegeben seien L_1, L_2, L_3 wie in Aufgabe 2. Wenden Sie den CYK-Algorithmus für folgende Instanzen an um zu prüfen ob das jeweilige Wort zur entsprechenden Sprache gehört:

(a) L_1 mit $w = abba$ sowie $w = aba$

(b) L_2 mit $w = aababb$

(c) L_3 mit $w = ababbaba$

Aufgabe 4

(a) Gegen Sie einen Kellerautomaten $\mathcal{M}_0$ für die Sprache

$$L_0 = L(\mathcal{M}_0) = \{a^i b^j c^k \mid i = j \text{ oder } j = k \text{ mit } i, j, k \geq 1\}$$

sowie eine akzeptierende Folge der Konfigurationsübergänge in $\mathcal{M}_0$ für das Wort $w = aaabbcc$ an.

(b) Geben Sie einen Kellerautomaten $\mathcal{M}_1$ für die Sprache L' mit

$$L' = L(\mathcal{M}_1) = \{a^n b^m \mid n, m \geq 0\,, n = 3m\}$$

sowie eine akzeptierende Folge der Konfigurationsübergänge in $\mathcal{M}_1$ für das Wort $w = aaab$ an.

(c) Entwerfen Sie einen Kellerautomaten $\mathcal{M}_2$ für die Sprache L_2 mit

$$L_2 = L(\mathcal{M}_2) = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}\ .$$

und geben Sie eine akzeptierende Folge der Konfigurationsübergänge in $\mathcal{M}_2$ für das Wort $w = aabbba$ an. Zur Erinnerung: $|w|_a$ bezeichnet hierbei die Anzahl an a's in w.

(d) Gegen Sie einen Kellerautomaten $\mathcal{M}_3$ für die Sprache

$$L_3 = L(\mathcal{M}_3) = \{(ab)^n(ba)^n \mid n \geq 0\}$$

über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ sowie eine akzeptierende Folge der Konfigurationsübergänge in $\mathcal{M}_3$ für das Wort $w = ababbaba$ an.

Aufgabe 5

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage.

Ist $L \subseteq \Sigma^*$ eine kontextfreie Sprache, so ist auch

$\pi(L) = \{a_1 \ldots a_n \in \Sigma^* :$ Es existiert eine Permutation $(i_1 \ldots i_n)$ von $(1 \ldots n)$, so daß $a_{i_1} \ldots a_{i_n} \in L\}$

kontextfrei.