TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Informatik Institut für Theoretische Informatik, Lehrstuhl für Automatentheorie

Formale Systeme
Repetitorium II am 30.01.2017

Wintersemester 2016/17

Aufgabe 1

Gegeben sind die folgenden Grammatiken G_i mit $1 \leq i \leq 4$:

- $G_1 = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aS, S \to Sb, S \to a\}, S)$
- $G_2 = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aS, S \to SbS, S \to a\}, S)$
- $G_3 = (\{S, B\}, \{a, b\}, \{S \to \varepsilon, S \to aSb, aS \to aB, B \to bB, B \to b\}, S)$
- $G_4 = (\{S, A\}, \{a, b\}, \{S \to a, A \to b\}, S)$

Geben Sie für jede Grammatik G_i den maximalen Chomsky-Typ j an. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Für den regulären Ausdruck $\alpha = (b(ab \mid b)^*)^*(a \mid b)^*a$ gilt: $aba \in L(\alpha)$.

b) Für die Grammatik $G = (\{S, X, Y, Z\}, \{a, b\}, \{S \to Y,\ X \to b,\ Y \to aYYb,\ aY \to aZ,\ ZY \to ZX,\ Z \to a\}, S)$ gilt: $aabb \in L(G)$.

Aufgabe 3

Sei $\Sigma_1 = \{a, b\}$ und $\Sigma_2 = \{a, b, c\}$. Geben Sie für jede der folgenden Sprachen L_i einen regulären Ausdruck α_i mit $L_i = L(\alpha_i)$ an. Begründen Sie die von Ihnen gewählten regulären Ausdrücke α_i.

a) $L_1 = \{w \in \Sigma_1^* \mid w \text{ beginnt mit } a \text{ und } |w|_b \text{ ist gerade}\}$

b) $L_2 = \{w \in \Sigma_2^* \mid w \text{ beginnt mit } a \text{ und } |w|_b \text{ ist gerade}\}$

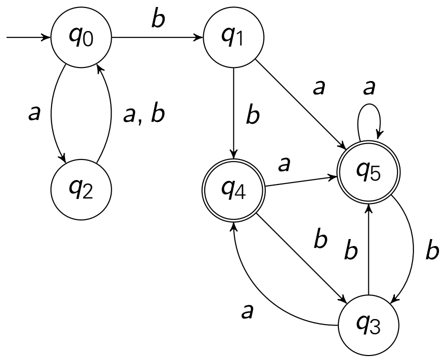
c) $L_3 = \{w \in \Sigma_1^* \mid \text{es gibt kein } u, v \in \Sigma_1^* \text{ mit } w = uaav\}$

d) $L_4 = \{w \in \Sigma_2^* \mid \text{es gibt kein } u, v \in \Sigma_2^* \text{ mit } w = uaav\}$

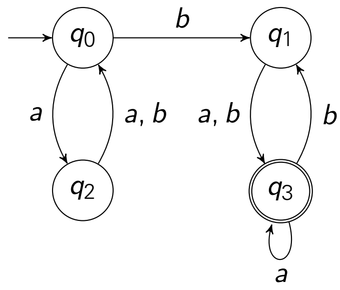
Aufgabe 4

Gegeben sind die zwei DFA $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$:

$\mathcal{M}_1$:



$\mathcal{M}_2$:



Berechnen Sie für den DFA $\mathcal{M}_2$ mithilfe des Arden-Lemmas einen regulären Ausdruck α mit $L(\alpha) = L(\mathcal{M}_2)$.

Aufgabe 5

Betrachten Sie $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ aus Aufgabe 4.

Wenn diese nicht minimal sind, reduzieren Sie den oder die entsprechenden Automaten. Erläutern Sie dabei Ihre Vorgehensweise. Geben Sie den oder die reduzierten Automaten an.

Gilt $L(\mathcal{M}_1) = L(\mathcal{M}_2)$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 6

Gegeben sind die Grammatiken G_1 und G_2.

- $G_1 = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, T\}, \Sigma = \{a, b\}$ und
  $P = \{S \to aT,\ S \to \varepsilon,\ T \to Sb\}$
- $G_2 = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B\}, \Sigma = \{a, b\}$ und
  $P = \{S \to A,\ S \to \varepsilon,\ A \to ab,\ A \to aBb,\ aB \to aaBb,\ aB \to a\}$

Geben Sie für jede Grammatik $G \in \{G_1, G_2\}$ jeweils

a) das maximale i an, so dass G eine Typ-i Grammatik ist und

b) das maximale j an, so dass $L(G)$ eine Typ-j Sprache ist.

Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 7

Betrachten Sie die Grammatik $G = (\{S, U, X, T, V, W, Y, D, E, A, B, C\}, \Sigma, P, S)$ mit $\Sigma = \{a, b, c\}$ und

$$\begin{aligned} P \;=\; \{ & S \longrightarrow UT, S \longrightarrow VW, U \longrightarrow XB, U \longrightarrow AB, \\ & X \longrightarrow AU, T \longrightarrow TC, T \longrightarrow c, V \longrightarrow AV, \\ & V \longrightarrow a, W \longrightarrow BY, W \longrightarrow BC, Y \longrightarrow WC, \\ & D \longrightarrow BC, D \longrightarrow BB, D \longrightarrow b, E \longrightarrow AB, \\ & E \longrightarrow AA, A \longrightarrow a, B \longrightarrow b, C \longrightarrow c\} \;. \end{aligned}$$

Verwenden Sie den CYK-Algorithmus (mit der Matrix-Notation aus der Vorlesung), um für die Wörter $w_1 = aabcc$ und $w_2 = aabbcc$ zu entscheiden, ob $w_i \in L(G)$ ist.

Aufgabe 8

Gegeben sind das Wort $w = aaaab$ und die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B, C\}, \Sigma = \{a, b\}$ und

$$\begin{aligned} P \;=\; \{ & S \longrightarrow AB, S \longrightarrow BC, S \longrightarrow bab, \\ & A \longrightarrow BA, A \longrightarrow a, \\ & B \longrightarrow ABC, B \longrightarrow b, \\ & C \longrightarrow AB, C \longrightarrow a, C \longrightarrow \varepsilon\} \;. \end{aligned}$$

a) Transformieren Sie die Grammatik G in eine ε-freie Grammatik G'.

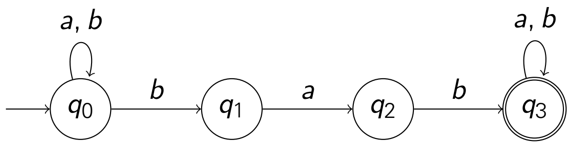
b) Transformieren Sie die Grammatik G' in ihre *Chomsky*-Normalform.

c) Entscheiden Sie mithilfe des Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus, ob $w \in L(G)$ gilt.

Aufgabe 9

Gegeben ist der folgende NFA $\mathcal{M}_1 = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \delta, \{q_0\}, \{q_3\})$ mit

δ:



a) Berechnen Sie mithilfe des *Arden*-Lemmas einen regulären Ausdruck α mit $L(\mathcal{M}_1) = L(\alpha)$.

b) Geben Sie einen DFA $\overline{\mathcal{M}_2}$ an, der das Komplement von L akzeptiert, indem Sie aus $\mathcal{M}_1$ einen DFA $\mathcal{M}_2$ für L und aus $\mathcal{M}_2$ anschließend den Komplementautomaten $\overline{\mathcal{M}_2}$ bilden.

Aufgabe 10

a) Gegeben sind die folgenden Grammatiken G_i mit $1 \leq i \leq 4$:

- $G_1 = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aS, S \rightarrow Sb, S \rightarrow a\}, S)$
- $G_2 = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aS, S \rightarrow SbS, S \rightarrow a\}, S)$
- $G_3 = (\{S, B\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow \varepsilon, S \rightarrow aSb, aS \rightarrow aB, B \rightarrow bB, B \rightarrow b\}, S)$
- $G_4 = (\{S, A\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow a, A \rightarrow b\}, S)$

Geben Sie für jede Grammatik G_i den maximalen Chomsky-Typ j an. Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Gegeben sind die folgenden Sprachen L_i mit $1 \leq i \leq 4$:

- $L_1 = \{a^n b^n a^n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$
- $L_2 = \{\varepsilon, a\}$
- $L_3 = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, n > m\}$
- $L_4 = L(\{a\} \cdot \{a\}^* \cdot \{b\} \cdot \{b\}^*) \setminus L_3$

Geben Sie für jede Sprache L_i den maximalen Chomsky-Typ j an. Begründen Sie Ihre Antwort. Die Darlegung der Beweisidee ist ausreichend.