TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Computational Logic ∴ Group

Fakultät Informatik, Institut für Künstliche Intelligenz, Professur Computational Logic

Dr. habil. Hannes Straß Dr. Dörthe Arndt

Formale Systeme

Wintersemester 2021/22

Probeklausur

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind jeweils wahr oder nicht wahr? Begründen Sie kurz Ihre Antworten – dabei dürfen Sie den gesamten Stoff und alle Resultate der Vorlesung und Übung verwenden.

a) Sei α ein regulärer Ausdruck, der den Kleene-Stern-Operator nicht verwendet. Dann beschreibt α eine endliche Sprache.

b) Jede Teilmenge einer nicht-regulären Sprache L ist nicht-regulär.

c) Es gilt $\emptyset^* = \{\varepsilon\}$.

d) Es gibt eine reguläre Sprache, für welche die Anzahl der Äquivalenzklassen der zugehörigen *Nerode*-Rechtskongruenz endlich ist.

e) Der Schnitt zweier kontextfreier Sprachen ist stets wieder kontextfrei.

f) Einband-Turingmaschinen sind weniger ausdrucksstark als Mehrband-Turingmaschinen.

g) Sei E eine Eigenschaft von Sprachen, die für manche Turing-erkennbare Sprachen gilt und für manche Turing-erkennbare Sprachen nicht gilt. Dann ist das folgende Problem unentscheidbar:

- Eingabe: Turingmaschine $\mathcal{M}$
- Ausgabe: Hat $L(\mathcal{M})$ die Eigenschaft E?

h) Zwei gegebene aussagenlogische Klauseln haben genau eine Resolvente.

i) Es gibt eine aussagenlogische Formel F, die sowohl in KNF als auch in DNF ist.

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Gegeben sei die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit

$$V = \{S, B\},\ \Sigma = \{a, b, c\} \text{ und}$$
$$P = \{S \to aBSc,\ S \to abc,\ Ba \to B,\ Ba \to aB,\ Bb \to bb\}\,.$$

a) Von welchem maximalen Typ ist G? Begründen Sie Ihre Antwort.

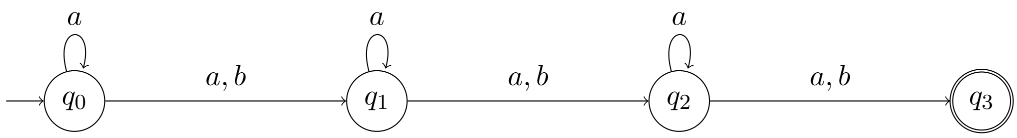
b) Bestimmen Sie vier Wörter der Sprache $L(G)$. Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Gilt $\varepsilon \in L(G)$? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Beschreiben Sie die durch G erzeugte Sprache $L(G)$.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Gegeben sei der NFA $\mathcal{M} = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \delta, \{q_0\}, \{q_3\})$ mit δ:



a) Berechnen Sie einen regulären Ausdruck α mit $L(\alpha) = L(\mathcal{M})$, indem Sie zunächst das Gleichungssystem für $\mathcal{M}$ aufstellen und es anschließend mithilfe des Arden-Lemmas lösen.

b) Konstruieren Sie einen zu $\mathcal{M}$ äquivalenten DFA $\mathcal{M}'$. Verwenden Sie dazu eine möglichst effiziente Potenzmengenkonstruktion aus der Vorlesung. Stellen Sie dabei sicher, dass der konstruierte Automat keine unerreichbaren Zustände erhält.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Gegeben sei das Wort $w = ccaab$ und die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit

$$V = \{S, T\},\ \Sigma = \{a, b, c\} \text{ und}$$
$$P = \{S \to TS,\ S \to cT,\ S \to a,\ T \to aSb,\ T \to aab,\ T \to TT,\ T \to c\}.$$

a) Geben Sie an, unter welchen Bedingungen eine kontextfreie Grammatik in Chomsky-Normalform vorliegt.

b) Begründen Sie, warum G nicht in Chomsky-Normalform ist. Transformieren Sie G in eine äquivalente Grammatik G' in Chomsky-Normalform. Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise.

c) Entscheiden Sie mithilfe des CYK-Algorithmus, ob $w \in L(G)$ gilt.

Aufgabe 5 (9 Punkte)

Gegeben seien die Sprachen

- $L_1 = \{\, b^i a^j \mid i, j \geq 1 \,\}$,
- $L_2 = \{\, a^n b^m a^m b^p \mid n, m, p \geq 0 \,\}$ und
- $L_3 = \{\, (ab)^k (ab)^k \mid k \geq 0 \,\}$

über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

a) Ist $\overline{L_1}$ regulär?

b) Ist L_2 regulär?

c) Ist L_3 regulär?

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort. Dabei dürfen Sie den gesamten Stoff und alle Resultate der Vorlesung und Übung verwenden.

Aufgabe 6 (12 Punkte)

a) Überführen Sie die Formel

$$(a \rightarrow c) \wedge (d \leftrightarrow (a \wedge c)) \wedge (a \vee \neg b)$$

in konjunktive Normalform. Ist die Formel allgemeingültig?

b) Wenden Sie das Resolutionsverfahren an, um zu entscheiden, ob die Folgerung

$$(a \vee d) \wedge (a \vee \neg b) \wedge (b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee c \vee d) \models (a \wedge b) \vee (\neg c \wedge d)$$

korrekt ist.

c) Betrachten Sie Formeln in KNF, in denen jede Klausel maximal zwei Literale enthält. Welche Worst-Case-Laufzeit ergibt sich für das Resolutionsverfahren?

Aufgabe 7 (8 Punkte)

Gegeben sei die Turingmaschine $\mathcal{M} = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_f\}, \{0, 1\}, \{0, 1, \sqcup\}, \delta, q_0, \{q_f\})$ mit folgender Übergangstabelle für δ:

$(q_0,$	$\sqcup,$	$\sqcup,$	$q_f,$	$N)$
$(q_0,$	$0,$	$\sqcup,$	$q_1,$	$R)$
$(q_0,$	$1,$	$\sqcup,$	$q_2,$	$R)$
$(q_1,$	$1,$	$1,$	$q_1,$	$R)$
$(q_1,$	$0,$	$0,$	$q_1,$	$R)$
$(q_1,$	$\sqcup,$	$\sqcup,$	$q_3,$	$L)$
$(q_2,$	$1,$	$1,$	$q_2,$	$R)$
$(q_2,$	$0,$	$0,$	$q_2,$	$R)$
$(q_2,$	$\sqcup,$	$\sqcup,$	$q_4,$	$L)$
$(q_3,$	$0,$	$\sqcup$	$q_5,$	$L)$
$(q_3,$	$\sqcup,$	$\sqcup$	$q_f,$	$N)$
$(q_4,$	$1,$	$\sqcup$	$q_5,$	$L)$
$(q_4,$	$\sqcup,$	$\sqcup$	$q_f,$	$N)$
$(q_5,$	$0,$	$0,$	$q_5,$	$L)$
$(q_5,$	$1,$	$1,$	$q_5,$	$L)$
$(q_5,$	$\sqcup,$	$\sqcup,$	$q_0,$	$R)$

a) Notieren Sie die Folge der Übergänge, die von $\mathcal{M}$ bei Eingabe von 101 vollzogen werden.

b) Ist $\mathcal{M}$ deterministisch? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Welche Sprache akzeptiert $\mathcal{M}$?

Aufgabe 8 (6 Punkte)

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ und $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = |w|_b \text{ oder } |w|_b = |w|_c\}$.

Betrachten Sie den folgenden Beweisversuch:

Behauptung: Die Sprache L_1 ist nicht deterministisch kontextfrei.
Beweis:

a) Angenommen, L_1 wäre deterministisch kontextfrei.

b) Wir definieren $L_2 = \{a\}^* \circ \{b\}^* \circ \{c\}^*$. L_2 ist von Chomsky-Typ $\boxed{\quad}$.

c) Da deterministisch kontextfreie Sprachen unter Schnitt mit $\boxed{\quad}$ abgeschlossen sind, ist der Schnitt $L_3 = L_1 \cap L_2$ deterministisch kontextfrei.

d) Wir betrachten nun diesen Schnitt $L_3 = \boxed{\quad}$.

e) Bekanntermaßen ist aber L_3 nicht deterministisch kontextfrei.

f) Widerspruch. Also ist L_1 nicht deterministisch kontextfrei. □

Füllen Sie die Kästchen im Beweis so, dass der Beweis korrekt wird. Begründen Sie außerdem, warum die Sprache L_3 nicht deterministisch kontextfrei ist.