

Theoretische Informatik und Logik

5. Übungsblatt

Sommersemester 2021

Die folgenden Aufgaben werden nicht in den Übungen besprochen und dienen der Selbstkontrolle.

Aufgabe H

Sei L eine unentscheidbare Sprache. Zeigen Sie:

- L hat eine Teilmenge $T \subseteq L$, die entscheidbar ist.
- L hat eine Obermenge $O \supseteq L$, die entscheidbar ist.
- Es gibt jeweils nicht nur eine sondern unendlich viele entscheidbare Teilmengen bzw. Obermengen wie in (a) und (b).

Aufgabe I

- Beschreiben Sie mit eigenen Worten die Probleme, die in P liegen.
- Beschreiben Sie mit eigenen Worten die Probleme, die in NP liegen.
- Beschreiben Sie mit eigenen Worten die Probleme, die in $PSPACE$ liegen.
- Erläutern Sie, warum $P \subseteq NP \subseteq PSPACE$ gilt.
- Beschreiben Sie für $\mathcal{C} = NP$ und $\mathcal{C} = PSPACE$, wann ein Problem „ \mathcal{C} -hart“ bzw. „ \mathcal{C} -vollständig“ ist.

Aufgabe 1

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

- Falls $P \neq NP$ gilt, dann auch $P \cap NP \neq \emptyset$.
- Es gibt Probleme, die NP-hart, aber nicht NP-vollständig sind.
- Polynomielle Reduzierbarkeit ist nicht transitiv.
- Ist $L_2 \in P$ und $L_1 \leq_p L_2$, dann ist auch $L_1 \in P$.
- Ist L_1 eine NP-vollständige Sprache und gilt $L_1 \leq_p L_2$, dann ist auch L_2 eine NP-vollständige Sprache.
- Ist L_2 eine NP-vollständige Sprache und gilt $L_1 \leq_p L_2$, dann ist auch L_1 eine NP-vollständige Sprache.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass das Wortproblem deterministischer endlicher Automaten in L liegt: ist

$$\mathbf{P}_{\text{DFA}} := \{ \text{enc}(\mathcal{A})\#\#\text{enc}(w) \mid \mathcal{A} \text{ ist ein DFA, der } w \text{ akzeptiert} \},$$

dann gilt $\mathbf{P}_{\text{DFA}} \in L$.

Aufgabe 3

Es sei $\mathbf{L} := \{ a^n \mid n \in \mathbb{N} \text{ ist keine Primzahl} \}$. Zeigen Sie, dass $\mathbf{L} \in \text{NP}$ gilt.

Aufgabe 4

Zeigen Sie: ist $P = \text{NP}$, dann gibt es einen Algorithmus, der in polynomieller Zeit für jede erfüllbare aussagenlogische Formel eine erfüllende Belegung findet.