TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN
Fakultät Informatik, Institut für Künstliche Intelligenz, Professur für Computational Logic

FORMALE SYSTEME

11. Vorlesung: Von regulären zu kontextfreien Sprachen

Hannes Straß

TU Dresden, 15. November 2021

Entscheidungsprobleme für Automaten

Wir haben bisher folgende Probleme für Automaten betrachtet:

- Leerheit: Gegeben $\mathcal{M}$, gilt $\mathbf{L}(\mathcal{M}) = \emptyset$?
- Inklusion: Gegeben $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$, gilt $\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \subseteq \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$?
- Äquivalenz: Gegeben $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$, gilt $\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) = \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$?

Das Wortproblem für FAs über Alphabet Σ besteht darin, die folgende Funktion zu berechnen:

Eingabe: ein FA $\mathcal{M}$ und ein Wort $w \in \Sigma^*$
Ausgabe: „ja“ wenn $w \in \mathbf{L}(\mathcal{M})$ und „nein“ wenn $w \notin \mathbf{L}(\mathcal{M})$

Das Wortproblem für NFAs

Was tun, wenn ein NFA gegeben ist?

Variante 1: NFA in DFA umwandeln (Potenzmengenkonstruktion), Wortproblem für DFA lösen
Exponentieller Algorithmus: Potenzmengen-DFA ist exponentiell groß

Variante 2: NFA direkt mit Zustandsmengen simulieren (vergleichbar „on-the-fly Version von Variante 1“)
Polynomieller Algorithmus: Zustandsmengen sind von linearer Größe; Berechnung der Nachfolgemenge als Vereinigung linear vieler δ-Ergebnismengen

Variante 3: Konstruiere einen DFA $\mathcal{M}_w$ mit $\mathbf{L}(\mathcal{M}_w) = \{w\}$ und prüfe ob $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}_w \neq \emptyset$
Polynomieller Algorithmus: $\mathcal{M}_w$ ist linear in $|w|$; Schnittmengen-DFA ist quadratisch groß; Leerheitstest ist polynomiell in dieser Größe

Details: Variante 2

Eingabe: NFA $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F \rangle$ und Wort w
Ausgabe: Ist $w \in \mathbf{L}(\mathcal{M})$?

- Initialisiere $Z_0 := Q_0$
- Für jedes Symbol σ_i in $w = \sigma_1 \cdots \sigma_{|w|}$:
  Berechne $Z_i := \bigcup_{q \in Z_{i-1}} \delta(q, \sigma_i)$
- Für alle $q \in F$:
  Falls $q \in Z_{|w|}$: Das Ergebnis ist „ja“.
- Falls kein $q \in F \cap Z_{|w|}$ gefunden wurde: Das Ergebnis ist „nein“.

Alle Teilberechnungen können in polynomieller Zeit ausgeführt werden, sofern $\mathcal{M}$ „vernünftig“ kodiert wird.

Das Wortproblem für NFAs

Was tun, wenn ein NFA gegeben ist?

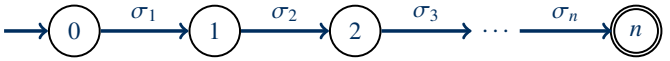
Variante 1: NFA in DFA umwandeln (Potenzmengenkonstruktion),
Wortproblem für DFA lösen
Exponentieller Algorithmus: Potenzmengen-DFA ist exponentiell groß

Variante 2: NFA direkt mit Zustandsmengen simulieren
(vergleichbar „on-the-fly Version von Variante 1“)
Polynomieller Algorithmus: Zustandsmengen sind von linearer Größe; Berechnung der Nachfolgemenge als Vereinigung linear vieler δ-Ergebnismengen

Variante 3: Konstruiere einen DFA $\mathcal{M}_w$ mit $\mathbf{L}(\mathcal{M}_w) = \{w\}$ und prüfe, ob $\mathbf{L}(\mathcal{M}) \cap \mathbf{L}(\mathcal{M}_w) \neq \emptyset$
Polynomieller Algorithmus: $\mathcal{M}_w$ ist linear in $|w|$; Schnittmengen-DFA ist quadratisch groß; Leerheitstest ist polynomiell in dieser Größe

Details: Variante 3

Der Automat $\mathcal{M}_w$ für $w = \sigma_1 \cdots \sigma_n$ ist leicht gefunden:



Eingabe: NFA $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F \rangle$ und Wort w
Ausgabe: Ist $w \in \mathbf{L}(\mathcal{M})$?

(1) Konstruiere $\mathcal{M}_w$
(2) Berechne Produktautomaten $\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}_w$
(3) Entscheide, ob $\mathbf{L}(\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}_w) \neq \emptyset$

Das Wortproblem für NFAs

Was tun, wenn ein NFA gegeben ist?

Variante 1: NFA in DFA umwandeln (Potenzmengenkonstruktion),
Wortproblem für DFA lösen
Exponentieller Algorithmus: Potenzmengen-DFA ist exponentiell groß

Variante 2: NFA direkt mit Zustandsmengen simulieren
(vergleichbar „on-the-fly Version von Variante 1“)
Polynomieller Algorithmus: Zustandsmengen sind von linearer Größe; Berechnung der Nachfolgemenge als Vereinigung linear vieler δ-Ergebnismengen

Variante 3: Konstruiere einen DFA $\mathcal{M}_w$ mit $\mathbf{L}(\mathcal{M}_w) = \{w\}$ und prüfe ob $\mathbf{L}(\mathcal{M}) \cap \mathbf{L}(\mathcal{M}_w) \neq \emptyset$
Polynomieller Algorithmus: $\mathcal{M}_w$ ist linear in $|w|$; Schnittmengen-DFA ist quadratisch groß; Leerheitstest ist polynomiell in dieser Größe

Wortproblem für NFAs – Komplexität

Variante 1: NFA in DFA umwandeln (Potenzmengenkonstruktion),
Wortproblem für DFA lösen

Variante 2: NFA direkt mit Zustandsmengen simulieren
(vergleichbar „on-the-fly Version von Variante 1“)

Variante 3: Konstruiere einen DFA $\mathcal{M}_w$ mit $\mathbf{L}(\mathcal{M}_w) = \{w\}$ und prüfe ob $\mathbf{L}(\mathcal{M}) \cap \mathbf{L}(\mathcal{M}_w) \neq \emptyset$

Mit Variante 2 und 3 erhalten wir:

Satz: Das Wortproblem für NFAs kann in polynomieller Zeit entschieden werden.

Weitere Probleme für Automaten

Das Endlichkeitsproblem für FAs über Alphabet Σ besteht darin, die folgende Funktion zu berechnen:

Eingabe: ein FA $\mathcal{M}$
Ausgabe: „ja“, wenn $\mathbf{L}(\mathcal{M})$ endlich ist; andernfalls „nein“

Idee (wie beim Pumping-Lemma): Unendliche Sprachen erfordern (mind. einen) Zyklus.
$\rightsquigarrow$ Suche nach Zyklen, die auf einem Pfad von einem Start- zu einem Endzustand liegen (polynomiell).

Das Universalitätsproblem für FAs über Alphabet Σ besteht darin, die folgende Funktion zu berechnen:

Eingabe: ein FA $\mathcal{M}$
Ausgabe: „ja“, wenn $\mathbf{L}(\mathcal{M}) = \Sigma^*$; andernfalls „nein“

Komplement des Leerheitsproblems: $\mathbf{L}(\mathcal{M}) = \Sigma^*$ genau dann, wenn $\mathbf{L}\left(\overline{\mathcal{M}}\right) = \emptyset$.
$\rightsquigarrow$ Komplexität abhängig von FA-Komplementierung.

Viereinhalb Wochen reguläre Sprachen

auf sieben Folien

Die Chomsky-Hierarchie

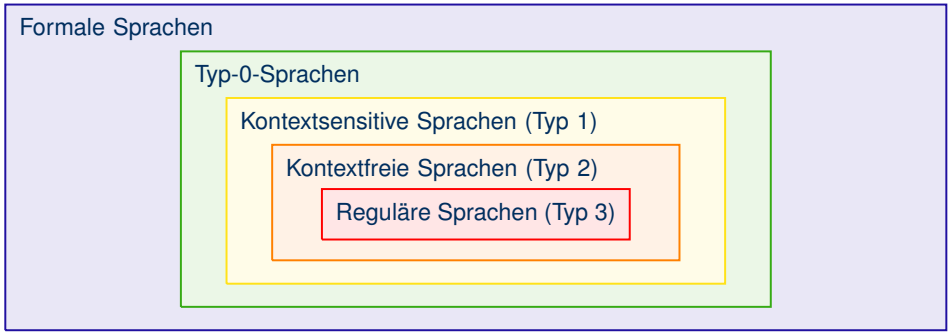
Die Chomsky-Hierarchie unterteilt Grammatiken in vier Stufen:

- **Typ 0**: beliebige Grammatiken
- **Typ 1**: kontextsensitive Grammatiken:
  (a) Alle Regeln $w \to v$ erfüllen die Bedingung $|w| \leq |v|$.
  (b) Es gibt eine Regel $S \to \epsilon$ und alle anderen Regeln $w \to v$ enthalten kein S in v und erfüllen $|w| \leq |v|$.
- **Typ 2**: kontextfreie Grammatiken:
  Alle Regeln haben die Form $A \to v$ für eine Variable A.
- **Typ 3**: reguläre Grammatiken:
  Alle Regeln haben eine der Formen

$$A \to cB \quad \text{oder} \quad A \to c \quad \text{oder} \quad A \to \epsilon,$$

  wobei A und B Variablen sind und c ein Terminalsymbol ist.

Chomskys Hierarchie ist eine Hierarchie



(Dafür mussten wir Typ 1 erweitern und ϵ-Regeln bei Typ 2 eliminieren.)

Automaten

Wir kennen mehrere Varianten endlicher Automaten:

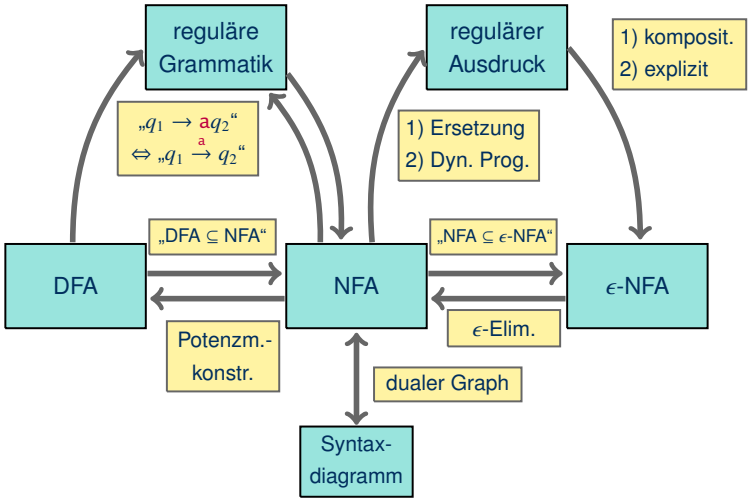
- Deterministischer endlicher Automat (DFA)
  - mit totaler Übergangsfunktion
- Nichtdeterministischer endlicher Automat (NFA)
  - mit ϵ-Übergängen
  - mit Wortübergängen
  - mit Übergängen für reguläre Ausdrücke

(Nur für die Umwandlung regulärer Ausdrücke in ϵ-NFAs.)

Die Sprache eines Automaten haben wir auf zwei Arten definiert:

- Mit Hilfe einer verallgemeinerten Übergangsfunktion, die ganze Wörter einliest;
- durch akzeptierende Läufe, die einem Wort zugeordnet werden können.

Darstellungen von Typ-3-Sprachen



Umformungsalgorithmen (1)

Eingabe	Ausgabe	Vorlesung
kontextfreie Grammatik	ϵ-freie kontextfreie Grammatik	2
DFA $\mathcal{M}$	totaler DFA $\mathcal{M}_{\text{total}}$	3
DFA $\mathcal{M}$	reguläre Grammatik $G_{\mathcal{M}}$	3
Syntaxdiagramm	NFA	4
NFA $\mathcal{M}$	Potenzmengen-DFA $\mathcal{M}_{\text{DFA}}$	4
reguläre Grammatik G	NFA $\mathcal{M}_G$	5
NFA mit Wortübergängen	ϵ-NFA	5
ϵ-NFA $\mathcal{M}$	NFA $\text{elim}_\epsilon(\mathcal{M})$	5

Umformungsalgorithmen (2)

Eingabe	Ausgabe	Vorlesung
NFAs $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$	Vereinigungs-NFA $\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$	5
NFAs/DFAs $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$	Produkt-NFA/DFA $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$	5
totaler DFA $\mathcal{M}$	Komplement-DFA $\overline{\mathcal{M}}$	5
NFAs $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$	ϵ-NFA $\mathcal{M}_1 \odot \mathcal{M}_2$ für Konkatenation	5
NFA $\mathcal{M}$	ϵ-NFA $\mathcal{M}^*$ für Kleene-Abschluss	5
regulärer Ausdruck	ϵ-NFA (Komposition)	6
regulärer Ausdruck	ϵ-NFA (explizit)	6
NFA	regulärer Ausdruck (Gleichungssystem)	7
NFA	regulärer Ausdruck (dyn. Programmierung)	7
totaler DFA $\mathcal{M}$	Quotienten-DFA $\mathcal{M}/_\sim$	8
totaler DFA $\mathcal{M}$	reduzierter DFA $\mathcal{M}_r$	8

Reguläre Sprachen

Die Menge der regulären Sprachen ist ...

- die Menge genau all jener Sprachen ...
  - die von einer Typ-3-Grammatik beschrieben werden;
  - die von einem DFA erkannt werden;
  - die von einem NFA erkannt werden;
  - die durch einen regulären Ausdruck beschrieben werden;
  - die endlich viele Myhill-Nerode-Kongruenzklassen haben;
- die kleinste Menge von Sprachen ...
  - welche alle endlichen Sprachen enthält und unter $\cap$, $\cup$, $\overline{}$, $\circ$ und * abgeschlossen ist;
  - welche die Sprachen $\emptyset$, $\{\epsilon\}$ und $\{a\}$ ($a \in \Sigma$) enthält und unter $\cup$, $\circ$ und * abgeschlossen ist.

- Alle endlichen Sprachen sind regulär (aber nicht umgekehrt).
- Alle regulären Sprachen erlauben Pumping (aber nicht umgekehrt).

Probleme für endliche Automaten

Problem	Fragestellung	Komplexität
Leerheit	$\mathbf{L}(\mathcal{M}) \stackrel{?}{=} \emptyset$	polynomiell
Inklusion	$\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \stackrel{?}{\subseteq} \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$	polynomiell falls $\mathcal{M}_2$ DFA exponentiell falls $\mathcal{M}_2$ NFA
Äquivalenz	$\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \stackrel{?}{=} \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$	polynomiell falls $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ DFA exponentiell falls $\mathcal{M}_1$ oder $\mathcal{M}_2$ NFA
Wortproblem	$w \stackrel{?}{\in} \mathbf{L}(\mathcal{M})$	polynomiell
Universalität	$\mathbf{L}(\mathcal{M}) \stackrel{?}{=} \Sigma^*$	polynomiell falls $\mathcal{M}$ DFA exponentiell falls $\mathcal{M}$ NFA
Endlichkeit	$\mathbf{L}(\mathcal{M})$ endlich?	polynomiell

Kontextfreie Sprachen

Kontextfreie Sprachen

Wir hatten kontextfreie Sprachen wie folgt definiert:

Eine kontextfreie Grammatik (oder Typ-2-Grammatik oder CFG) enthält nur Regeln der Form $A \to v$, wobei A eine Variable ist.

Eine Sprache ist kontextfrei (oder Typ 2), wenn sie durch eine kontextfreie Grammatik dargestellt werden kann.

Das genügt, um nichtreguläre Sprachen darzustellen:

Beispiel: Die Sprache $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ ist kontextfrei, da sie durch die folgende CFG dargestellt werden kann:

$$S \to \epsilon \mid aSb$$

(Übung: Beweisen, dass die Grammatik wirklich diese Sprache erzeugt.)

Beispiel

CFGs eignen sich zur Darstellung vollständig geklammerter Ausdrücke.

Beispiel: Vollständig geklammerte reguläre Ausdrücke über Alphabet $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ sind als CFG über dem Alphabet $\Sigma \cup \{\emptyset, \epsilon, (,), |, ^*\}$ darstellbar:

$$S \to \emptyset \mid \epsilon \mid A \mid (SS) \mid (S|S) \mid (S)^*$$
$$A \to \sigma_1 \mid \ldots \mid \sigma_n$$

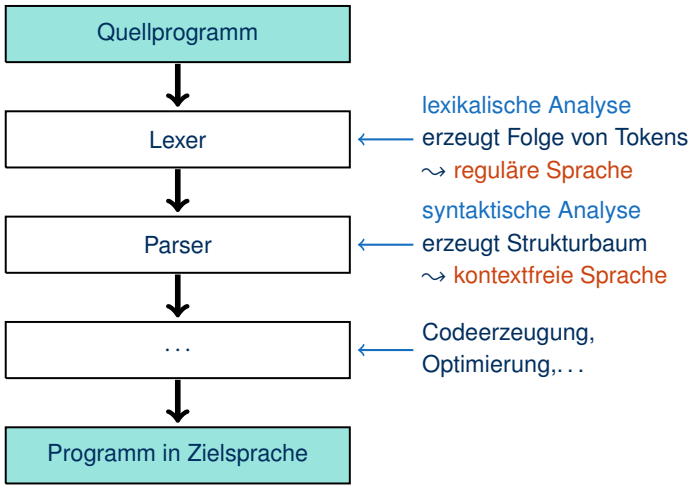
Allgemein ist die Beschreibung korrekt geklammerter Ausdrücke für viele Sprachen sehr wichtig, nicht zuletzt für Programmiersprachen.

Ein praktisches Beispiel . . .

Kontextfreie Grammatik für XML 1.1 (in W3C EBNF):

```
[1]   document       ::= prolog element Misc* - Char* RestrictedChar Char*
[2]   Char           ::= [#x1-#xD7FF] | [#xE000-#xFFFD] | [#x10000-#x10FFFF] /* any Unicode character, excluding the surrogate blocks, FFFE, and FFFF. */
[2a]  RestrictedChar ::= [#x1-#x8] | [#xB-#xC] | [#xE-#x1F] | [#x7F-#x84] | [#x86-#x9F]
[3]   S              ::= (#x20 | #x9 | #xD | #xA)+
[4]   NameStartChar  ::= ":" | [A-Z] | "_" | [a-z] | [#xC0-#xD6] | [#xD8-#xF6] | [#xF8-#x2FF] | [#x370-#x37D] | [#x37F-#x1FFF] | [#x200C-#x200D] | [#x2070-#x218F] | [#x2C00-#x2FEF] | [#x3001-#xD7FF] | [#xF900-#xFDCF] | [#xFDF0-#xFFFD] | [#x10000-#xEFFFF]
[4a]  NameChar       ::= NameStartChar | "-" | "." | [0-9] | #xB7 | [#x0300-#x036F] | [#x203F-#x2040]
[5]   Name           ::= NameStartChar (NameChar)*
[6]   Names          ::= Name (#x20 Name)*
[7]   Nmtoken        ::= (NameChar)+
[8]   Nmtokens       ::= Nmtoken (#x20 Nmtoken)*
[9]   EntityValue    ::= '"' ([^%&"] | PEReference | Reference)* '"' |  "'" ([^%&'] | PEReference | Reference)* "'"
[10]  AttValue       ::= '"' ([^<&"] | Reference)* '"' |  "'" ([^<&'] | Reference)* "'"
[11]  SystemLiteral  ::= ('"' [^"]* '"') | ("'" [^']* "'")
[12]  PubidLiteral   ::= '"' PubidChar* '"' | "'" (PubidChar - "'")* "'"
[13]  PubidChar      ::= #x20 | #xD | #xA | [a-zA-Z0-9] | [-'()+,./:=?;!*#@$_%]
[14]  CharData       ::= [^<&]* - ([^<&]* ']]>' [^<&]*)
[15]  Comment        ::= '<!--' ((Char - '-') | ('-' (Char - '-')))* '-->'
[16]  PI             ::= '<?' PITarget (S (Char* - (Char* '?>' Char*)))? '?>'
[17]  PITarget       ::= Name - (('X' | 'x') ('M' | 'm') ('L' | 'l'))
[18]  CDSect         ::= CDStart CData CDEnd
[19]  CDStart        ::= '<![CDATA['
[20]  CData          ::= (Char* - (Char* ']]>' Char*))
[21]  CDEnd          ::= ']]>'
[22]  prolog         ::= XMLDecl Misc* (doctypedecl Misc*)?
[23]  XMLDecl        ::= '<?xml' VersionInfo EncodingDecl? SDDecl? S? '?>'
[24]  VersionInfo    ::= S 'version' Eq ("'" VersionNum "'" | '"' VersionNum '"')
[25]  Eq             ::= S? '=' S?
[26]  VersionNum     ::= '1.' [0-9]+
[27]  Misc           ::= Comment | PI | S
[28]  doctypedecl    ::= '<!DOCTYPE' S Name (S ExternalID)? S? ('[' intSubset ']' S?)? '>'
[28a] DeclSep        ::= PEReference | S
[28b] intSubset      ::= (markupdecl | DeclSep)*
[29]  markupdecl     ::= elementdecl | AttlistDecl | EntityDecl | NotationDecl | PI | Comment
[30]  extSubset      ::= TextDecl? extSubsetDecl
[31]  extSubsetDecl  ::= ( markupdecl | conditionalSect | DeclSep)*
[32]  SDDecl         ::= S 'standalone' Eq (("'" ('yes' | 'no') "'") | ('"' ('yes' | 'no') '"'))
(Productions 33 through 38 have been removed.)
[39]  element        ::= EmptyElemTag
[40]  STag           ::= '<' Name (S Attribute)* S? '>'
[41]  Attribute      ::= Name Eq AttValue
[42]  ETag           ::= '</' Name S? '>'
[43]  content        ::= CharData? ((element | Reference | CDSect | PI | Comment) CharData?)*
[44]  EmptyElemTag   ::= '<' Name (S Attribute)* S? '/>'
[45]  elementdecl    ::= '<!ELEMENT' S Name S contentspec S? '>'
[46]  contentspec    ::= 'EMPTY' | 'ANY' | Mixed | children
[47]  children       ::= (choice | seq) ('?' | '*' | '+')?
[48]  cp             ::= (Name | choice | seq) ('?' | '*' | '+')?
[49]  choice         ::= '(' S? cp ( S? '|' S? cp )+ S? ')'
[50]  seq            ::= '(' S? cp ( S? ',' S? cp )* S? ')'
[51]  Mixed          ::= '(' S? '#PCDATA' (S? '|' S? Name)* S? ')*' | '(' S? '#PCDATA' S? ')'
[52]  AttlistDecl    ::= '<!ATTLIST' S Name AttDef* S? '>'
[53]  AttDef         ::= S Name S AttType S DefaultDecl
[54]  AttType        ::= StringType | TokenizedType | EnumeratedType
[55]  StringType     ::= 'CDATA'
[56]  TokenizedType  ::= 'ID' | 'IDREF' | 'IDREFS' | 'ENTITY' | 'ENTITIES' | 'NMTOKEN' | 'NMTOKENS'
[57]  EnumeratedType ::= NotationType | Enumeration
[58]  NotationType   ::= 'NOTATION' S '(' S? Name (S? '|' S? Name)* S? ')'
[59]  Enumeration    ::= '(' S? Nmtoken (S? '|' S? Nmtoken)* S? ')'
[60]  DefaultDecl    ::= '#REQUIRED' | '#IMPLIED' | (('#FIXED' S)? AttValue)
[61]  conditionalSect::= includeSect | ignoreSect
[62]  includeSect    ::= '<![' S? 'INCLUDE' S? '[' extSubsetDecl ']]>'
[63]  ignoreSect     ::= '<![' S? 'IGNORE' S? '[' ignoreSectContents* ']]>'
[64]  ignoreSectContents::= Ignore ('<![' ignoreSectContents ']]>' Ignore)*
[65]  Ignore         ::= Char* - (Char* ('<![' | ']]>') Char*)
[66]  CharRef        ::= '&#' [0-9]+ ';' | '&#x' [0-9a-fA-F]+ ';'
[67]  Reference      ::= EntityRef | CharRef
[68]  EntityRef      ::= '&' Name ';'
[69]  PEReference    ::= '%' Name ';'
[70]  EntityDecl     ::= GEDecl | PEDecl
[71]  GEDecl         ::= '<!ENTITY' S Name S EntityDef S? '>'
[72]  PEDecl         ::= '<!ENTITY' S '%' S Name S PEDef S? '>'
[73]  EntityDef      ::= EntityValue | (ExternalID NDataDecl?)
[74]  PEDef          ::= EntityValue | ExternalID
[75]  ExternalID     ::= 'SYSTEM' S SystemLiteral | 'PUBLIC' S PubidLiteral S SystemLiteral
[76]  NDataDecl      ::= S 'NDATA' S Name
[77]  TextDecl       ::= '<?xml' VersionInfo? EncodingDecl S? '?>'
[78]  extParsedEnt   ::= TextDecl? content - Char* RestrictedChar Char*
[80]  EncodingDecl   ::= S 'encoding' Eq ("'" EncName "'" | '"' EncName '"' )
[81]  EncName        ::= [A-Za-z] ([A-Za-z0-9._] | '-')*
[82]  NotationDecl   ::= '<!NOTATION' S Name S (ExternalID | PublicID) S? '>'
[83]  PublicID       ::= 'PUBLIC' S PubidLiteral
```


Beispiel Compiler



Wiederholung: Ableitung

Sei $\langle V, \Sigma, P, S\rangle$ eine Grammatik. Die 1-Schritt-Ableitungsrelation ist eine binäre Relation $\Rightarrow$ zwischen Wörtern aus $(V \cup \Sigma)^*$, so dass $u \Rightarrow v$ genau dann, wenn:

$$u = w_1\, x\, w_2 \text{ und } v = w_1\, y\, w_2 \text{ und es gibt eine Regel } x \to y \in P$$

wobei $w_1, w_2, x, y \in (V \cup \Sigma)^*$ beliebige Wörter sind.

Die Ableitungsrelation $\Rightarrow^*$ ist der reflexive, transitive Abschluss von $\Rightarrow$, das heißt $u \Rightarrow^* v$ genau dann, wenn:

$$u = w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow w_{n-1} \Rightarrow w_n = v$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ und $w_0, \ldots, w_n \in (V \cup \Sigma)^*$ beliebige Wörter sind. Insbesondere gilt $u \Rightarrow^* u$ für alle $u \in (V \cup \Sigma)^*$ (Fall $n = 0$).

Anmerkung: Der Begriff „Herleitungsrelation“ ist auch gebräuchlich. Wir verwenden „Ableitung“ und „Herleitung“ synonym.

Anmerkung 2: Manche Autor:innen schreiben $\vdash$ statt $\Rightarrow$.

Beispiel

Die Grammatik

$$S \to A \mid M \mid V$$
$$A \to (S{+}S)$$
$$M \to (S{*}S)$$
$$V \to x \mid y \mid z$$

erzeugt zum Beispiel das Wort $(x * (y + z))$ über die Ableitung:

$$S \Rightarrow M \Rightarrow (S{*}S) \Rightarrow (V{*}S) \Rightarrow (x{*}S) \Rightarrow (x{*}A) \Rightarrow (x{*}(S{+}S))$$
$$\Rightarrow (x{*}(V{+}S)) \Rightarrow (x{*}(y{+}S)) \Rightarrow (x{*}(y{+}V)) \Rightarrow (x{*}(y{+}z))$$

Quiz: Ableitungen kontextfreier Grammatiken

Sei $\langle V, \Sigma, P, S\rangle$ eine Grammatik. Für $w_1, w_2, x, y \in (V \cup \Sigma)^*$ gilt:

$$w_1 x w_2 \Rightarrow w_1 y w_2 \text{ gdw. es gibt eine Regel } x \to y \in P.$$

Die Ableitungsrelation $\Rightarrow^*$ ist der reflexive, transitive Abschluss von $\Rightarrow$.

Quiz: Wir betrachten die CFG $G = \langle V, \Sigma, P, S\rangle$ mit $\Sigma = \{0, 1\}$, ...

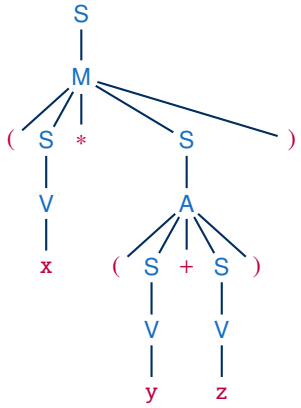
Ableitungen als Bäume

Grammatik:

$S \to A \mid M \mid V$ $A \to (S{+}S)$
$M \to (S{*}S)$ $V \to x \mid y \mid z$

Ableitung:

$S \Rightarrow M \Rightarrow (S{*}S) \Rightarrow (V{*}S)$
$\Rightarrow (x{*}S) \Rightarrow (x{*}A)$
$\Rightarrow (x{*}(S{+}S)) \Rightarrow (x{*}(V{+}S))$
$\Rightarrow (x{*}(y{+}S)) \Rightarrow (x{*}(y{+}V))$
$\Rightarrow (x{*}(y{+}z))$



Von Ableitung zu Ableitungsbaum

Sei $G = \langle V, \Sigma, P, S\rangle$ eine Grammatik und sei $S = w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow w_n$ eine Ableitung (mit $w_i \in (V \cup \Sigma)^*$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$).

Wir erhalten den entsprechenden Ableitungsbaum wie folgt:

- Der Ableitungsbaum wird initialisiert mit einem einzigen Wurzelknoten S.
- Der Baum wird schrittweise konstruiert. Nach i Schritten ergeben die Blätter des Baumes – gelesen von links nach rechts – immer genau w_i.
- Wenn in einem Ableitungsschritt $w_i \Rightarrow w_{i+1}$ die Regel $V \to u$ angewendet wurde, dann erhält der Knoten für V genau $|u|$ Kindknoten, die – von links nach rechts – mit den Symbolen aus u beschriftet werden.

Ableitungsbäume sind auch als Syntaxbäume oder Parsebäume bekannt.

Vom Ableitungsbaum zur Ableitung?

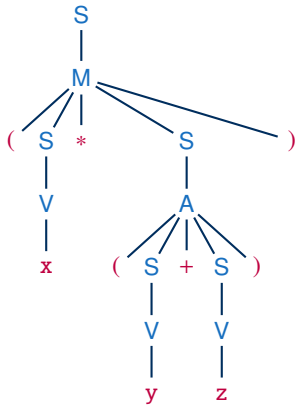
Der selbe Ableitungsbaum wird oft durch viele Ableitungen erzeugt:

Vorige Ableitung:

$S \Rightarrow M \Rightarrow (S*S) \Rightarrow (V*S)$
$\Rightarrow (x*S) \Rightarrow (x*A)$
$\Rightarrow (x*(S+S)) \Rightarrow (x*(V+S))$
$\Rightarrow (x*(y+S)) \Rightarrow (x*(y+V))$
$\Rightarrow (x*(y+z))$

Alternative Ableitung:

$S \Rightarrow M \Rightarrow (S*S) \Rightarrow (S*A)$
$\Rightarrow (S*(S+S)) \Rightarrow (S*(S+V))$
$\Rightarrow (S*(V+V)) \Rightarrow (V*(V+V))$
$\Rightarrow (V*(V+z)) \Rightarrow (V*(y+z))$
$\Rightarrow (x*(y+z))$



Vom Ableitungsbaum zur Ableitung

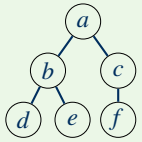
Beobachtung:

- Für jeden inneren Knoten im Ableitungsbaum gibt es genau einen Ableitungsschritt.
- Die Reihenfolge der Schritte ist egal, sofern Elternknoten vor ihren Kindern ersetzt werden.

Eine totale Ordnung der Knoten eines Baums, bei der Eltern vor ihren Kindern betrachtet werden, heißt topologische Sortierung.

$\rightsquigarrow$ Jede topologische Sortierung der Knoten eines Ableitungsbaumes führt zu einer erlaubten Ableitung.

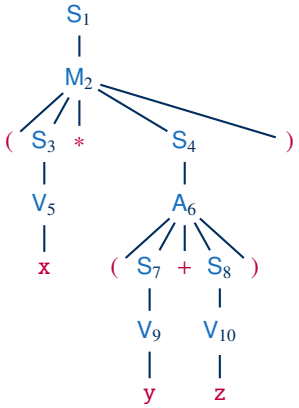
Beispiel:



Topologische Sortierungen:
abcdef (Breitensuche von links), *acbfed* (Breitensuche von rechts), *abdecf* (Tiefensuche von links), *acfbed* (Tiefensuche von rechts), ...

Vom Ableitungsbaum zur Ableitung: Beispiel

Wir markieren die Variablen zur Veranschaulichung mit Indizes:



Sortierung $S_1M_2S_3V_5S_4A_6S_7V_9S_8V_{10}$:

$S_1 \Rightarrow M_2 \Rightarrow (S_3*S_4) \Rightarrow (V_5*S_4)$
$\Rightarrow (x*S_4) \Rightarrow (x*A_6)$
$\Rightarrow (x*(S_7+S_8)) \Rightarrow (x*(V_9+S_8))$
$\Rightarrow (x*(y+S_8)) \Rightarrow (x*(y+V_{10}))$
$\Rightarrow (x*(y+z))$

Entspricht Tiefensuche von links
$\rightsquigarrow$ Linksableitung

Alternative Reihenfolge bei Tiefensuche von rechts:
$S_1M_2S_4A_6S_8V_{10}S_7V_9S_3V_5$
$\rightsquigarrow$ Rechtsableitung

Rechtsableitungen und Linksableitungen

Man kann diese speziellen Ableitungen auch ohne den Ableitungsbaum direkt erzeugen:

- Linksableitung: In jedem Ableitungsschritt wird die am weitesten links stehende Variable ersetzt.
- Rechtsableitung: In jedem Ableitungsschritt wird die am weitesten rechts stehende Variable ersetzt.

Bei Typ-2-Grammatiken kann jede dieser Strategien jedes erzeugbare Wort generieren.

(Bei Typ-1-Grammatiken im Allgemeinen nicht. Übung: Warum?)

Anwendung Ableitungsbaum

Der Ableitungsbaum ist von großer praktischer Bedeutung, da er die „innere Struktur“ eines Wortes einer kontextfreien Sprache repräsentiert.

In der Praxis geht es meist nicht darum, zu prüfen, ob ein Wort in einer Sprache liegt, sondern darum, seine syntaktische Struktur zu ermitteln.

Beispiele:

- Parsebäume in der Verarbeitung natürlicher Sprache können Aufschluss über die Bedeutung eines Satzes geben.
- Syntaxbäume in Programmiersprachen sind die Grundlage für die inhaltliche Interpretation des Codes.
- Ableitungsbäume in Mark-Up-Sprachen wie HTML oder XML sind entscheidend für die Adressierung von Elementen (z.B. DOM im Browser).

Zusammenfassung und Ausblick

Wir kennen viele Charakterisierungen für reguläre Sprachen, die man mit zahlreichen Umformungen in Beziehung setzen kann.

Wörter in kontextfreien Sprachen haben eine interessante innere Struktur, die wir durch Ableitungsbäume darstellen können.

Bei Typ-2-Grammatiken repräsentieren Ableitungsbäume mehrere mögliche Ableitungen.

Offene Fragen:

- Wie kann das Wortproblem bei kontextfreien Grammatiken gelöst werden?
- Haben kontextfreie Sprachen ein Berechnungsmodell?
- Wie sehen nicht-kontextfreie Sprachen aus und wie erkennt man sie?