Theoretische Informatik und Logik

Musterlösung zu Übungsblatt 6

Sommersemester 2018

Aufgabe 3

Sei Σ ein Alphabet und $A, B \subseteq \Sigma^*$. Wir sagen, dass A auf B in *logarithmischen Platz reduzierbar ist*, und schreiben $A \leq_\ell B$, falls es eine Many-One-Reduktion von A nach B gibt, die in logarithmischen Platz berechenbar ist. Zeigen Sie: gilt $A \leq_\ell B$ und $B \leq_\ell C$, dann gilt auch $A \leq_\ell C$.

Lösung: Wir zeigen, dass für zwei logspace-berechenbare Funktion $f, g \colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ auch $f \circ g$ logspace-berechenbar ist. Seien dazu $\mathcal{M}_f$ und $\mathcal{M}_g$ Turing-Maschinen, die mit logarithmischer Platzbeschränkung die Funktionen f und g berechnen.

Eine erste Idee, eine Turing-Maschine $\mathcal{M}$ zu erhalten, die $f \circ g$ berechnet, ist, zuerst $\mathcal{M}_g$ auf der Eingabe aufzurufen, das Zwischenergebnis zu speichern, und dann $\mathcal{M}_f$ auf diesem Zwischenergebnis laufen zu lassen. Dieser Idee funktioniert jedoch nicht: zwar benutzt $\mathcal{M}_g$ bei Eingabe $w \in \Sigma^*$ nur zusätzlich logarithmischen Platz zur Berechnung von $g(w)$. Dieses Ergebnis kann jedoch polynomiell groß sein in der Länge von w – und damit exponentiell in der Größe des zur Verfügung stehenden Platzes, der ja logarithmisch in der Größe von w beschränkt ist. Damit kann das Zwischenergebnis $g(w)$ nicht vollständig gespeichert werden und dieser Ansatz funktioniert nicht.

Wir können aber diese Idee so modifizieren, dass sie funktioniert! Dazu berechnen wir die Zeichen von $g(w)$ „on demand“: wir verändern $\mathcal{M}_g$ so, dass sie nur das k-te Symbol von $g(w)$ berechnet. Dies kann erreicht werden, indem $\mathcal{M}_g$ mit einem weiteren Zähler p versehen wird, der um eins hochgezählt wird, wann immer $\mathcal{M}_g$ ein Symbol ausgeben möchte. Ist der Wert von p gleich k, gibt $\mathcal{M}_g$ das entsprechende Zeichen aus und hält an.

Um $f(g(w))$ in logspace zu berechnen, gehen wir nun wie folgt vor: wir simulieren die Berechnung von $\mathcal{M}_f$. Wann immer diese Berechnung ein Symbol von $g(w)$ lesen möchte, simulieren wir $\mathcal{M}_g$ wie oben beschrieben. Beide Simulationen können in logspace durchgeführt werden, und damit kann auch $f(g(w))$ in logspace berechnet werden.

Diese Berechnung von $f(g(w))$ ist recht ineffizient, da Symbole von $g(w)$ möglicherweise mehrfach berechnet werden. Wir haben aber potentiell nicht genug Platz, um das gesamte Wort $g(w)$ zu speichern. Wir tauschen also „Platz gegen Zeit“.