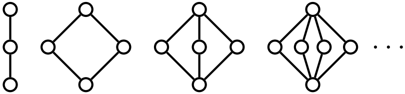
Kontextfaltungen

Daniel Borchmann

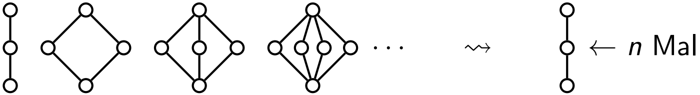
Institut für Algebra, TU Dresden

9. Juli 2009

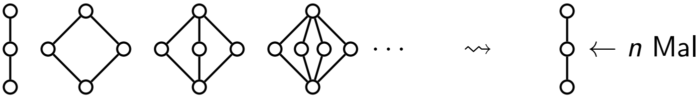
Motivation



Motivation



Motivation



×

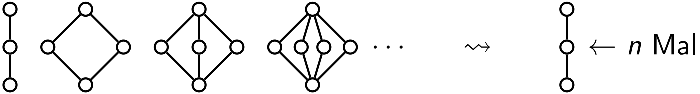
×	
	×

×		
	×	
		×

×			
	×		
		×	
			×

$\cdots$

Motivation



×

×	
	×

×		
	×	
		×

×			
	×		
		×	
			×

$\ldots \quad \rightsquigarrow$

	$1 \; \ldots \; n$
1 $\vdots$ n	$=$

Präordnungsfaltung

Definition (Präordnungsfaltung)

Es sei $\underline{P} = (P, \leq)$ eine prägeordnete Menge, $\Gamma \leq \underline{\mathrm{Aut}}(\underline{P})$ und Y eine Transversale der Bahnen

$$\Gamma \setminus\!\!\setminus P = \{\, \Gamma(a) \mid a \in P \,\}.$$

Dann ist die *Faltung von $\underline{P}$ unter Γ (mittels Y)* definiert als das Tupel

$$\mathrm{rep}_\Gamma(\underline{P}) := (Y, \leq_Y, (\Gamma_y)_{y \in Y}, \lambda),$$

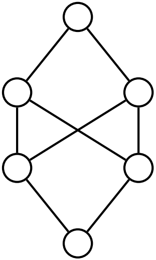
wobei

$$\begin{array}{rccc} \lambda: & Y \times Y & \longrightarrow & \mathfrak{P}(\Gamma) \\ & (a, b) & \longmapsto & \{\, \gamma \in \Gamma \mid a \leq \gamma(b) \,\} \end{array}$$

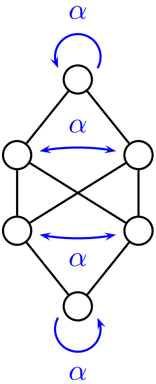
und

$$a \leq_Y b \iff \lambda(a, b) \neq \emptyset.$$

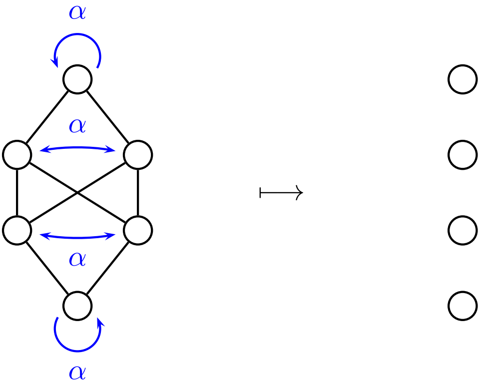
Ein Beispiel



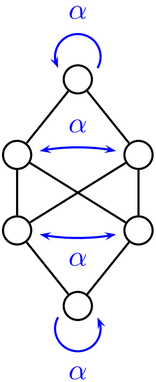
Ein Beispiel



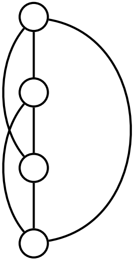
Ein Beispiel



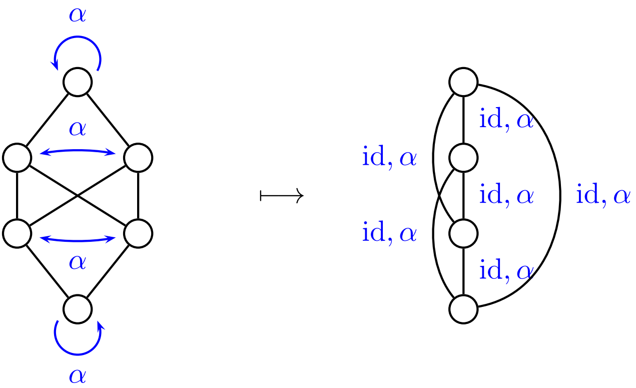
Ein Beispiel



$\longmapsto$



Ein Beispiel



Verkürzte Beschriftung

Beobachtung

Es sei $\alpha \in \lambda(p, q), \beta_p \in \Gamma_p, \beta_q \in \Gamma_q$.

Verkürzte Beschriftung

Beobachtung

Es sei $\alpha \in \lambda(p, q), \beta_p \in \Gamma_p, \beta_q \in \Gamma_q$. Dann gilt

$$\beta_p^{-1}(p) \leq \alpha(\beta_q(q)),$$

also

$$p \leq (\beta_p \circ \alpha \circ \beta_q)(q),$$

Verkürzte Beschriftung

Beobachtung

Es sei $\alpha \in \lambda(p, q), \beta_p \in \Gamma_p, \beta_q \in \Gamma_q$. Dann gilt

$$\beta_p^{-1}(p) \leq \alpha(\beta_q(q)),$$

also

$$p \leq (\beta_p \circ \alpha \circ \beta_q)(q),$$

also ist $\Gamma_p \circ \lambda(p, q) \circ \Gamma_q \subseteq \lambda(p, q)$.

Verkürzte Beschriftung

Lemma

Jede Beschriftung $\lambda(p,q)$ ist eine disjunkte Vereinigung von Doppelnebenklassen:

$$\lambda(p,q) = \dot{\bigcup}_{\alpha \in \tilde{\lambda}(p,q)} \Gamma_p \circ \alpha \circ \Gamma_q .$$

Verkürzte Beschriftung

Lemma

Jede Beschriftung $\lambda(p, q)$ ist eine disjunkte Vereinigung von Doppelnebenklassen:

$$\lambda(p, q) = \dot{\bigcup}_{\alpha \in \tilde{\lambda}(p,q)} \Gamma_p \circ \alpha \circ \Gamma_q.$$

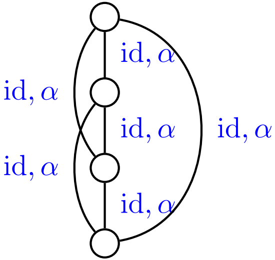
Definition (verkürzte Beschriftung)

Eine Abbildung λ_{abr}, für die $\lambda_{\mathrm{abr}}(a, b)$ stets ein Repräsentantensystem der Doppelnebenklassenzerlegung von

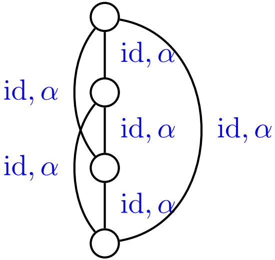
$$\lambda(a, b) \setminus \bigcup_{a<c<b} \lambda(a, c) \circ \lambda(c, b)$$

ist, heißt *verkürzte Beschriftungsfunktion* zu λ.

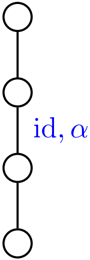
Verkürzte Beschriftung



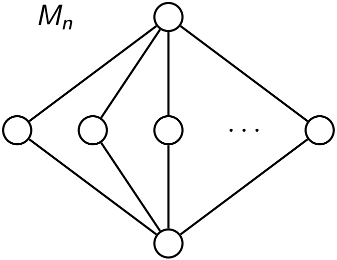
Verkürzte Beschriftung



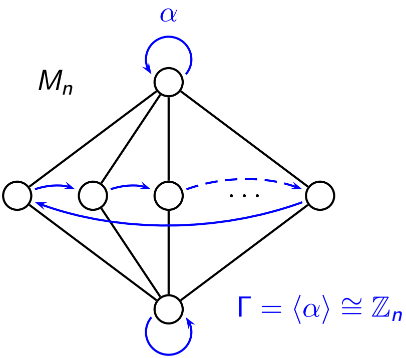
$\rightsquigarrow$



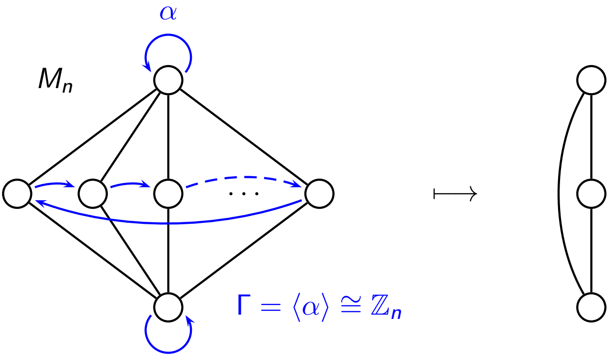
Beispiel



Beispiel

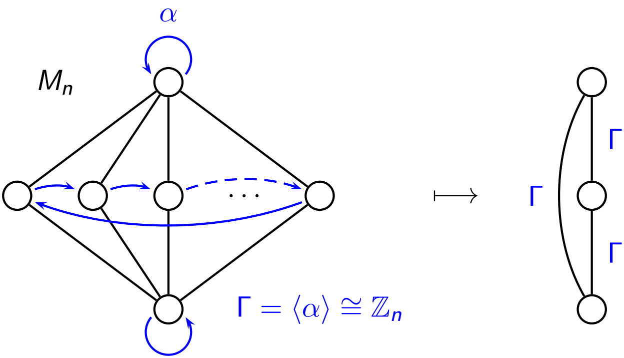


Beispiel



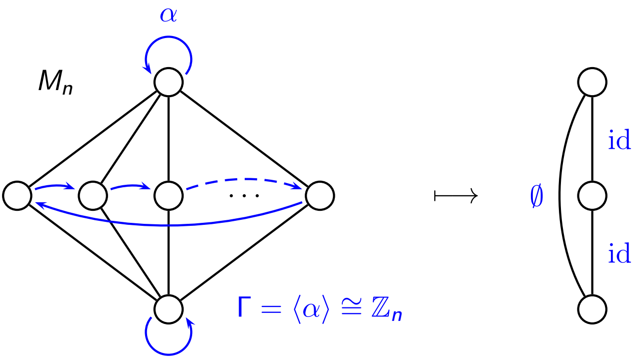
α
M_n
$\Gamma = \langle \alpha \rangle \cong \mathbb{Z}_n$
$\longmapsto$

Beispiel

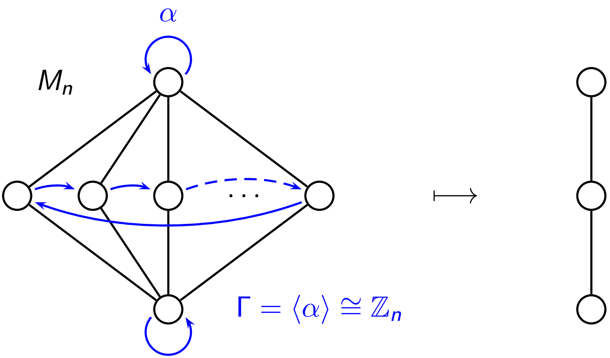


α
M_n
$\dots$
$\Gamma = \langle\alpha\rangle \cong \mathbb{Z}_n$
$\longmapsto$
Γ
Γ
Γ

Beispiel


α
M_n
$\dots$
$\Gamma = \langle \alpha \rangle \cong \mathbb{Z}_n$
$\longmapsto$
id
$\emptyset$
id

Beispiel



α
M_n
$\dots$
$\Gamma = \langle \alpha \rangle \cong \mathbb{Z}_n$
$\longmapsto$

Verallgemeinerung

Beobachtung

Statt einer Präordnung $\leq$ ist eine binäre Relation R ausreichend.

Verallgemeinerung

Beobachtung

Statt einer Präordnung $\leq$ ist eine binäre Relation R ausreichend.

Definition

Sei M eine Menge, $R \subseteq M \times M$ eine binäre Relation. Eine Abbildung $\alpha \in S_M$ ist ein *Automorphismus von* (M, R), wenn für alle $x, y \in M$ gilt

$$(x, y) \in R \iff (\alpha(x), \alpha(y)) \in R.$$

Es wird dann (M, R) eine *binäre Relationenstruktur* genannt und die Gruppe der Automorphismen von (M, R) mit $\underline{\mathrm{Aut}}(M, R)$ bezeichnet.

Verallgemeinerung

Definition (Faltung von binären Relationenstrukturen)

Es sei M eine Menge, $R \subseteq M \times M$ und $\Gamma \leq \underline{\mathrm{Aut}}(M, R)$. Weiterhin sei Y eine Transversale der Bahnen $\Gamma \setminus\!\!\setminus M$.
Dann ist die *Faltung von* (M, R) *unter* Γ *(mittels* Y*)* definiert als

$$\mathrm{rep}_\Gamma(M, R) := (Y, R_Y, (\Gamma_y)_{y \in Y}, \lambda),$$

wobei

$$\begin{array}{rccc} \lambda : & Y \times Y & \longrightarrow & \mathfrak{P}(\Gamma) \\ & (a, b) & \longmapsto & \{\, \gamma \in \Gamma \mid (a, \gamma(b)) \in R \,\} \end{array}$$

und

$$(a, b) \in R_Y \iff \lambda(a, b) \neq \emptyset.$$

Anwendung auf Kontexte

Beispiel

Jeder formale Kontext (G, M, I) kann als binäre Relationenstruktur $(G \mathbin{\dot\cup} M, I)$ aufgefasst werden.

Anwendung auf Kontexte

Beispiel

Jeder formale Kontext (G, M, I) kann als binäre Relationenstruktur $(G \dot\cup M, I)$ aufgefasst werden.

Bemerkung

Ist α ein Automorphismus von $(G \dot\cup M, I)$, so dass

$$\alpha[G] = G \quad \text{und} \quad \alpha[M] = M$$

gilt, so kann α als ein Kontextautomorphismus von (G, M, I) aufgefasst werden.

Definition (Kontextfaltung)

Es sei $\mathbb{K} = (G, M, I)$ ein formaler Kontext, $\Gamma \leq \underline{\mathrm{Aut}}(\mathbb{K})$ und Y_G, Y_M Transversalen der Bahnen von Γ auf G bzw. M. Dann heißt die Struktur

$$\mathrm{rep}_\Gamma(\mathbb{K}) := (Y_G, Y_M, I_{\mathrm{rep}}, (\Gamma_g)_{g \in Y_G}, (\Gamma_m)_{m \in Y_M}, \eta)$$

die *Kontextfaltung von* $\mathbb{K}$ *unter* Γ *(mittels* Y_G *und* Y_M*)*, wobei

$$\eta(g, m) := \{\, \alpha \in \Gamma \mid g\ I\ \alpha(m) \,\}$$

und

$$g\ I_{\mathrm{rep}}\ m \iff \eta(g, m) \neq \emptyset$$

ist.

Beispiel

	a	b	c	d	e	f
a	×			×	×	×
b		×		×	×	×
c			×	×	×	×
d	×	×	×		×	×
e	×	×	×	×		×
f	×	×	×	×	×	

Beispiel

$$\underline{\mathrm{Aut}}\left(\begin{array}{|c||ccc|ccc|}
\hline
 & a & b & c & d & e & f \\
\hline
\hline
a & \times & & & \times & \times & \times \\
b & & \times & & \times & \times & \times \\
c & & & \times & \times & \times & \times \\
\hline
d & \times & \times & \times & & \times & \times \\
e & \times & \times & \times & \times & & \times \\
f & \times & \times & \times & \times & \times & \\
\hline
\end{array}\right) := \Gamma \cong S_3 \times S_3$$

Beispiel

$$\underline{\mathrm{Aut}}\left(\begin{array}{c||ccc|ccc} & a \leftrightarrow & b \leftrightarrow & c & d \leftrightarrow & e \leftrightarrow & f \\ \hline a & \times & & & \times & \times & \times \\ \updownarrow b & & \times & & \times & \times & \times \\ \updownarrow c & & & \times & \times & \times & \times \\ \hline d & \times & \times & \times & & \times & \times \\ \updownarrow e & \times & \times & \times & \times & & \times \\ \updownarrow f & \times & \times & \times & \times & \times & \end{array}\right) := \Gamma \cong S_3 \times S_3$$

Beispiel

	a	b	c	d	e	f
a	×			×	×	×
b		×		×	×	×
c			×	×	×	×
d	×	×	×		×	×
e	×	×	×	×		×
f	×	×	×	×	×	

Beispiel

	a	b	c	d	e	f
a	×			×	×	×
b		×		×	×	×
c			×	×	×	×
d	×	×	×		×	×
e	×	×	×	×		×
f	×	×	×	×	×	

$\rightsquigarrow$

	a	d	
a			Γ_a
d			Γ_d
	Γ_a	Γ_d	Γ

Beispiel

	a	b	c	d	e	f
a	×			×	×	×
b		×		×	×	×
c			×	×	×	×
d	×	×	×		×	×
e	×	×	×	×		×
f	×	×	×	×	×	

$\rightsquigarrow$

	a	d	
a	Γ_a		Γ_a
d			Γ_d
	Γ_a	Γ_d	Γ

Beispiel

	a	b	c	d	e	f
a	×			×	×	×
b		×		×	×	×
c			×	×	×	×
d	×	×	×		×	×
e	×	×	×	×		×
f	×	×	×	×	×	

$\rightsquigarrow$

	a	d	
a	Γ_a		Γ_a
d		$\Gamma \setminus \Gamma_d$	Γ_d
	Γ_a	Γ_d	Γ

Beispiel

	a	b	c	d	e	f
a	×			×	×	×
b		×		×	×	×
c			×	×	×	×
d	×	×	×		×	×
e	×	×	×	×		×
f	×	×	×	×	×	

$\rightsquigarrow$

	a	d	
a	Γ_a	Γ	Γ_a
d	Γ	$\Gamma \setminus \Gamma_d$	Γ_d
	Γ_a	Γ_d	Γ

Verkürzte Beschriftung für Kontextfaltungen

	a	d	
a	Γ_a	Γ	Γ_a
d	Γ	$\Gamma \setminus \Gamma_d$	Γ_d
	Γ_a	Γ_d	Γ

Verkürzte Beschriftung für Kontextfaltungen

	a	d	
a	Γ_a	Γ	Γ_a
d	Γ	$\Gamma \setminus \Gamma_d$	Γ_d
	Γ_a	Γ_d	Γ

$\rightsquigarrow$

	a	d	
a	id	id	Γ_a
d	id	$(d\ e)$	Γ_d
	Γ_a	Γ_d	Γ

Verkürzte Beschriftung für Kontextfaltungen

	$a_1, \ldots, a_n$	$b_1, \ldots, b_n$
a_1 $\vdots$ a_n	$=$	∇
b_1 $\vdots$ b_n	∇	$\neq$

Verkürzte Beschriftung für Kontextfaltungen

	$a_1, \dots, a_n$	$b_1, \dots, b_n$
a_1 $\vdots$ a_n	$=$	∇
b_1 $\vdots$ b_n	∇	$\neq$

$\rightsquigarrow$

	a	d	
a	id	id	Γ_a
d	id	$(d\ e)$	Γ_d
	Γ_a	Γ_d	Γ

Ableitung in Kontextfaltungen

Bemerkungen

Ableitung in Kontextfaltungen

Bemerkungen

- In Kontextfaltungen können Ableitungsoperatoren definiert werden (η-Ableitung).

Ableitung in Kontextfaltungen

Bemerkungen

- In Kontextfaltungen können Ableitungsoperatoren definiert werden (η-Ableitung).
- Diese simulieren die Ableitung im ursprünglichen Kontext.

Ableitung in Kontextfaltungen

Bemerkungen

- In Kontextfaltungen können Ableitungsoperatoren definiert werden (η-Ableitung).
- Diese simulieren die Ableitung im ursprünglichen Kontext.

Folgerung

Damit ist NextClosure in Kontextfaltungen möglich, also kann (theoretisch) die Begriffsverbandsfaltung direkt aus der Kontextfaltung berechnet werden.

Ableitung in Kontextfaltungen

Bemerkungen

- In Kontextfaltungen können Ableitungsoperatoren definiert werden (η-Ableitung).
- Diese simulieren die Ableitung im ursprünglichen Kontext.

Folgerung

Damit ist NextClosure in Kontextfaltungen möglich, also kann (theoretisch) die Begriffsverbandsfaltung direkt aus der Kontextfaltung berechnet werden.

Bemerkung

Die Berechnung der Standardkontextfaltung aus der Faltung eines Begriffsverbandes ist einfach.

Ausblick

Ungeklärte Problemstellungen

Ausblick

Ungeklärte Problemstellungen

- Regelexploration?

Ausblick

Ungeklärte Problemstellungen

- Regelexploration?
- Effiziente Algorithmen?

Ausblick

Ungeklärte Problemstellungen

- Regelexploration?
- Effiziente Algorithmen?
- Eigenschaften der Automorphismengruppe Γ?

Vielen Dank